Roman Brilej

alfa

Linearna funkcija

Zbirka nalog za matematiko v
srednjem strokovnem izobraževanju

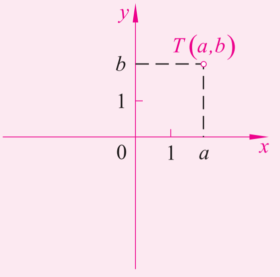
Ljubljana 2014

Kazalo

1. Pravokotni koordinatni sistem v ravnini

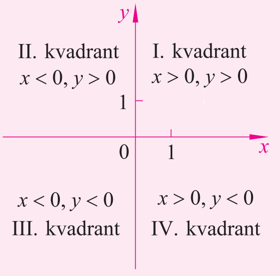
Pravokotni ali kartezični koordinatni sistem določata dve pravokotni premici, na katerih so upodobljena realna števila. Ti dve premici imenujemo **koordinatni osi**. Običajno je vodoravna **abscisna os** (os x) in navpična **ordinatna os** (os y). Presečišče osi je **koordinatno izhodišče** (točka 0). Koordinatni osi usmerimo tako, da točka 1 leži na abscisni osi desno od koordinatnega izhodišča (točke 0), na ordinatni osi pa nad koordinatnim izhodiščem. Navadno vzamemo na oseh enako veliki enoti.

Poljubni točki T ravnine je v danem koordinatnem sistemu prirejen par realnih števil (a, b). Imenujemo ju **koordinati** točke T in pišemo $T(a, b)$. Prva koordinata a je **abscisa** točke T, druga koordinata b je **ordinata** točke T. Absciso a točke T dobimo tako, da skozi točko T načrtamo vzporednico ordinatni osi. Le-ta seka abscisno os v točki $x = a$. Ordinato b točke T dobimo tako, da skozi točko T načrtamo vzporednico abscisni osi. Ordinatno os seka v točki $y = b$. Prav tako pa je na podoben način poljubnemu paru (a, b) realnih števil prirejena točka $T(a, b)$ v ravnini.



Koordinatni osi razdelita ravnino na štiri **kvadrante**.

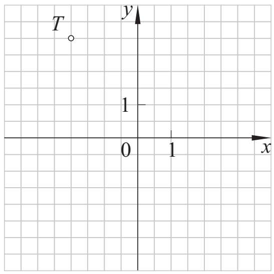
V I. kvadrantu so točke, ki imajo obe koordinati pozitivni, v II. kvadrantu so točke, ki imajo absciso negativno, ordinato pa pozitivno, v III. kvadrantu so točke, ki imajo obe koordinati negativni, v IV. kvadrantu pa so točke, ki imajo absciso pozitivno, ordinato pa negativno.



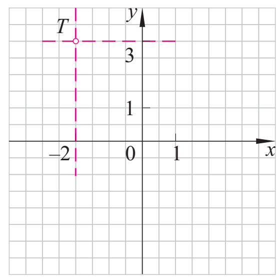
Premico, ki razpolavlja I. in III. kvadrant, imenujemo **simetrala lihih kvadrantov**. Na njej ležijo točke, ki imajo obe koordinati enaki: $y = x$. Premico, ki razpolavlja II. in IV. kvadrant, imenujemo **simetrala sodih kvadrantov**. Na njej ležijo točke, ki imajo koordinati nasprotni: $y = -x$.

Zgledi

1. Določi koordinati točke T na sliki.



Rešitev: Skozi točko T narišimo vzporednici k obema koordinatnima osema. Vzporednica k ordinatni osi seka abscisno os v točki $x = -2$ (2 enoti levo od točke 0). Vzporednica k abscisni osi seka ordinatno os v točki $y = 3$ (3 enote nad točko 0).



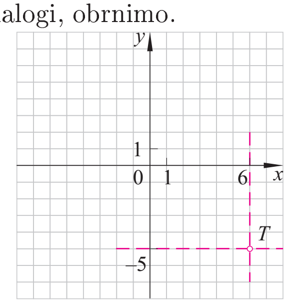
Iz zgornjega sledi, da je $x = 2$ abscisa točke T, $y = 3$ pa ordinata točke T, kar združimo v zapis:

$$T(-2, 3)$$

Pripomnimo, da nam v primeru, ko imamo dano koordinatno mrežo, ni potrebno risati vzporednic, saj so le-te del mreže.

2. V pravokotnem koordinatnem sistemu nariši točko $T(6, -5)$.

Rešitev: Postopek, ki smo ga uporabili v prejšnji nalogi, obrnimo. Na abscisni osi označimo absciso točke T, to je $x = 6$, na ordinatni osi pa ordinato $y = -5$. Skozi ti točki narišimo vzporednici h koordinatnima osema. Sekata se v točki T.

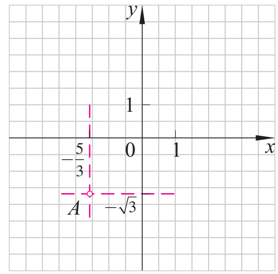


3. V pravokotnem koordinatnem sistemu nariši točko $A(-\frac{5}{3}, -\sqrt{3})$.

Rešitev: Tokrat imamo opraviti z necelimi koordninatami, zato bomo risali zgolj približno. Koordinati zapišemo z decimalnim številom na eno decimalko natančno:

$$x \doteq -1{\cdot}7 \qquad y \doteq -1{\cdot}7$$

Koordinati označimo na oseh tako, da poleg posamezne črtice zapišemo natančno vrednost, npr. $-\frac{5}{3}$ in ne približka $-1\dot{}7$. Postopek nadaljujemo kot v prejšnji nalogi.



4. Katera izmed točk $A(-2,0)$, $B(\sqrt{3},-1)$ in $C(0,4)$ leži na abscisni osi?
Rešitev: Na abscisni osi ležijo natanko tiste točke, ki imajo ordinato enako 0. V našem primeru je to točka A.

5. Katera izmed točk $A(\sqrt{2},0)$, $B(0,0)$ in $C(0,-\frac{1}{2})$ leži na ordinatni osi?
Rešitev: Na ordinatni osi ležijo točke, ki imajo absciso enako 0. Izmed danih točk sta to točki B in C.

6. Določi tak a, da bo točka $A(3a-1,4a+5)$ ležala na abscisni osi.
Rešitev: Točka A bo ležala na abscisni osi, če bo njena ordinata enaka 0:

$$4a+5=0$$

Iz zgornje enačbe dobimo:

$$4a=-5$$

in rešitev:

$$a=-\frac{5}{4}$$

7. Določi tak a, da bo točka $B(a^2-4,a^2+4)$ ležala na ordinatni osi.
Rešitev: Točka B bo ležala na ordinatni osi, če bo njena abscisa enaka 0:

$$a^2-4=0$$

Levo stran dobljene enačbe razstavimo:

$$(a-2)(a+2)=0$$

Produkt dveh števil je enak 0, če je vsaj eden izmed faktorjev enak 0:

$$a-2=0 \qquad \text{ali} \qquad a+2=0$$

Iz prve enačbe dobimo $a=2$, iz druge pa $a=-2$. To sta rešitvi naše naloge.

8. Katera izmed točk $A(-\frac{2}{3},6)$, $B(\sqrt{2}-1,\sqrt{3}-2)$ in $C(4\pi-12,4-\sqrt{5})$ ima pozitivno absciso in negativno ordinato?
Rešitev: Pri vseh točkah preverimo predznak koordinat in ugotovimo, ali točka zadostuje našim zahtevam. Za določitev predznaka si lahko pomagamo s približki. Najprej poglejmo abscise naših točk:

$$A:\quad x=-\frac{2}{3}<0$$

$$B:\quad x=\sqrt{2}-1\doteq 1\dot{}41-1=0\dot{}41>0$$

$$C:\quad x=4\pi-12\doteq 4\cdot 3\dot{}14-12=0\dot{}56>0$$

Vidimo, da imata samo točki B in C pozitivno absciso, zato točka A ne zadošča našim zahtevam. Tako poglejmo še ordinati točk B in C:

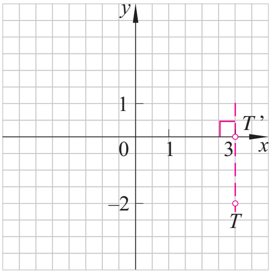
$$B: \quad y = \sqrt{3} - 2 \doteq 1{\cdot}73 - 2 = -0{\cdot}27 < 0$$

$$C: \quad y = 4 - \sqrt{5} \doteq 4 - 2{\cdot}24 = 1{\cdot}76 > 0$$

Od danih točk ima negativno ordinato le točka B. To je torej edina izmed danih točk, ki ima pozitivno absciso in negativno ordinato.

9. Nariši pravokotno projekcijo točke $T(3, -2)$ na abscisno os in zapiše njeni koordinati.

Rešitev: Narišimo točko T v pravokotni koordinatni sistem. Pravokotno projekcijo T' točke T na os x dobimo tako, da skozi točko T narišemo pravokotnico na os x. Le-ta seka os x v točki T'.



Zapišimo še koordinati točke T':

$$T'(3, 0)$$

Vidimo, da je pravokotna projekcija T' ohranila absciso točke T, ordinata pa je enaka 0, saj leži točka T' na abscisni osi.

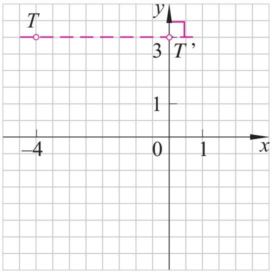
10. Določi koordinati pravokotne projekcije točke $A(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ na abscisno os.

Rešitev: Kot smo že ugotovili pri prejšnji nalogi, ima pravokotna projekcija A' točke A na abscisno os enako absciso kot točka A, ordinata pa je enaka 0. Tako imamo:

$$A'(\sqrt{3}, 0)$$

11. Nariši pravokotno projekcijo točke $T(-4, 3)$ na ordinatno os.

Rešitev: Ravnajmo podobno kot pri pravokotni projekciji na abscisno os, le da tokrat narišemo pravokotnico na ordinatno os. Dobimo točko:



$$T'(0, 3)$$

Pravokotna projekcija T' točke T ima absciso enako 0, ordinato pa ima enako kot točka T.

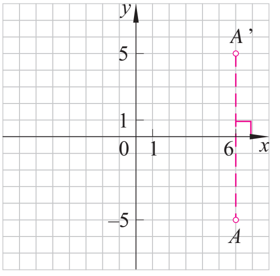
12. Določi koordinati pravokotne projekcije točke $P(p - q, p + q)$ na ordinatno os.

Rešitev: Sklep na koncu prejšnje naloge nam da rešitev:

$$P'(0, p + q)$$

13. Točko $A(6, -5)$ prezrcali čez abscisno os in zapiši koordinati dobljene točke.

Rešitev: V pravokotnem koordinatnem sistemu narišimo točko A in jo prezrcalimo čez abscisno os. To storimo tako, da skozi točko A narišemo pravokotnico na abscisno os in prenesemo razdaljo točke A do osi x na nasprotno stran.



Dobili smo zrcalno točko:

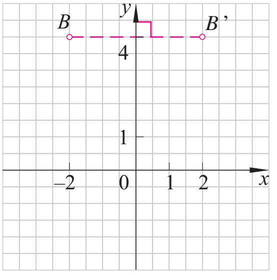
$$A'(6, 5)$$

Vidimo, da ima zrcalna točka točke A glede na abscisno os enako absciso kot točka A, ordinato pa ima nasprotno predznačeno.

14. Točko $B(-2, 4)$ prezrcali čez ordinatno os in zapiši koordinati dobljene točke.

Rešitev: Ravnajmo podobno kot v prejšnji nalogi, le da tokrat zrcalimo čez ordinatno os. Dobimo točko:

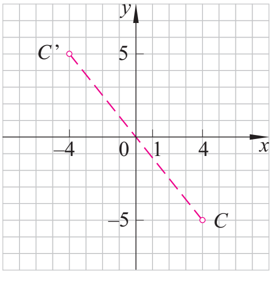
$$B'(2, 4)$$



15. Prezrcali točko $C(4, -5)$ čez koordinatno izhodišče in zapiši koordinati dobljene točke.

Rešitev: Narišimo točko C in jo prezrcalimo čez koordinatno izhodišče v točko C'. To storimo tako, da narišemo premico skozi točko C in koordinatno izhodišče, nato pa razdaljo točke C do koordinatnega izhodišča prenesemo na drugo stran. Dobili smo zrcalno točko:

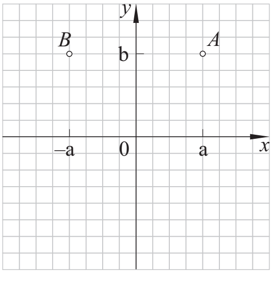
$$C'(-4, 5)$$



16. Kakšno posebno lego imata točki $A(3\,021, -7{\cdot}6)$ in $B(-3\,021, -7{\cdot}6)$?

Rešitev: Risanje danih točk ni ravno prijetno delo, zato si bomo pomagali s splošnimi ugotovitvami.

Vidimo, da imata točki A in B nasprotni abscisi in enaki ordinati. Če označimo točko A z $A(a, b)$, lahko zapišemo točko B kot $B(-a, b)$. Lego takih točk nam prikazuje slika. Vidimo, da sta točki A in B zrcalni glede na ordinatno os.



17. Kakšno posebno lego imata točki $A(\sqrt{3}-\pi, 1-\sqrt{2})$ in $B(\pi-\sqrt{3}, \sqrt{2}-1)$?
Rešitev: Tudi to pot točk ne bomo risali, ampak zgolj prepoznali povezavo med koordinatami. Označimo koordinati točke A z a in b, torej $A(a, b)$:

$$a = \sqrt{3} - \pi \qquad \text{in} \qquad b = 1 - \sqrt{2}$$

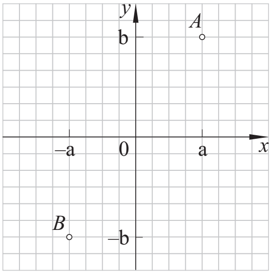
Koordinati točke B lahko pišemo kot:

$$x = \pi - \sqrt{3} = -(\sqrt{3} - \pi) = -a$$

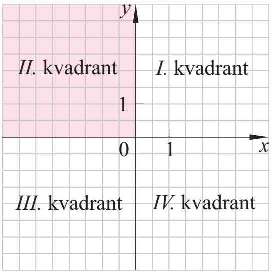
$$y = 1 - \sqrt{2} = -(\sqrt{2} - 1) = -b$$

Tako lahko točko B pišemo kot $B(-a, -b)$.

Narišimo splošno sliko in vidimo, da sta točki A in B zrcalni glede na koordinatno izhodišče.



18. V katerem kvadrantu leži točka $T(-\sqrt{3}, 4)$?
Rešitev: Dana točka ima negativno absciso, kar pomeni, da leži levo od ordinatne osi. Ker ima pozitivno ordinato, leži nad abscisno osjo. Torej leži točka T v II. kvadrantu.



19. Katero izmed koordinatnih osi seka daljica s krajiščema $A(-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3})$ in $B(4-\sqrt{2}, \pi-3)$?
Rešitev: Da lahko odgovorimo na zastavljeno vprašanje, je dovolj vedeti, v katerem kvadrantu ležita krajišči daljice. Točka A ima absciso negativno, ordinato pa pozitivno, saj je:

$$2 - \sqrt{3} \doteq 2 - 1{\cdot}73 = 0{\cdot}27 > 0$$

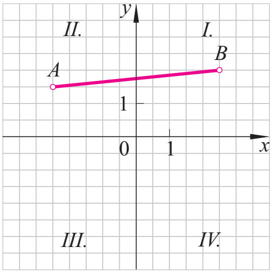
Torej leži točka A v II. kvadrantu. Točka B ima absciso pozitivno, prav tako pa je pozitivna ordinata:

$$4 - \sqrt{2} \doteq 4 - 1{\cdot}41 = 2{\cdot}59 > 0$$

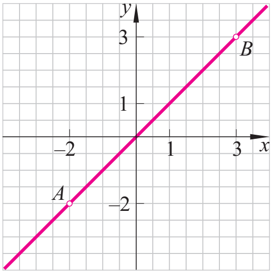
$$\pi - 3 \doteq 3{\cdot}14 - 3 = 0{\cdot}14 > 0$$

Točka B leži v I. kvadrantu.

S slike je razvidno, da daljica, ki ima eno krajišče v II. kvadrantu in drugo krajišče v I. kvadrantu, seka ordinatno os. To velja tudi za našo daljico.



20. Nariši premico, ki poteka skozi točki $A(-2,-2)$ in $B(3,3)$.
Rešitev: Narišimo obe točki in skozi njiju še premico. Opazimo lahko, da poteka skozi koordinatno izhodišče in razpolavlja I. in III. kvadrant. To premico imenujemo simetrala lihih kvadrantov.



21. Katera izmed točk $A(-4,3)$, $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ in $C(0\dot{}\overline{4},\frac{4}{9})$ leži na simetrali lihih kvadrantov?
Rešitev: Na simetrali lihih kvadrantov ležijo natanko tiste točke, ki imajo absciso enako ordinati ($y = x$). V našem primeru tako točka A kot točka B ne izpolnjujeta tega pogoja, za točko C pa moramo to še ugotoviti. Število $0\dot{}\overline{4}$ pretvorimo v ulomek po znanem postopku:

$$\begin{aligned}
x &= 0\dot{}\overline{4} \quad / \cdot 10 \\
10x &= 4\dot{}\overline{4} \\
10x - x &= 4\dot{}\overline{4} - 0\dot{}\overline{4} \\
9x &= 4 \quad / : 9 \\
x &= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Vidimo, da ima točka C obe koordinati enaki, zato leži na simetrali lihih kvadrantov.

22. Ali točka $T(2-\sqrt{3},\sqrt{3}-2)$ leži na simetrali sodih kvadrantov?
Rešitev: Točka $T(x,y)$ leži na simetrali sodih kvadrantov natanko tedaj, ko ima koordinati nasprotno enaki:

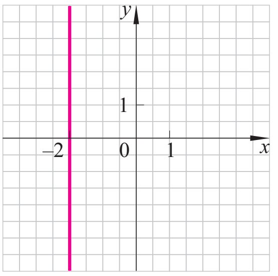
$$y = -x$$

V našem primeru je:

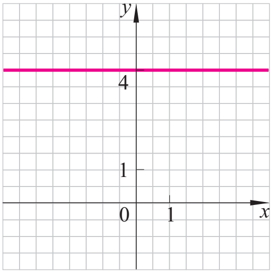
$$\sqrt{3}-2 = -(-\sqrt{3}+2) = -(2-\sqrt{3})$$

Vidimo, da točka T izpolnjuje pogoj $y = -x$, zato leži na simetrali sodih kvadrantov.

23. Nariši množico vseh točk (x, y), za katere je $x = -2$.
Rešitev: Točke, za katere je $x = -2$ (y pa poljuben), tvorijo premico, ki je vzporedna ordinatni osi in seka abscisno os pri $x = -2$.

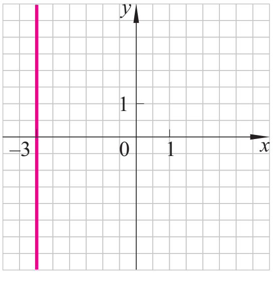


24. Nariši množico točk (x, y), za katere je $y = 4$.
Rešitev: Za razliko od prejšnje naloge je tokrat x poljuben in y konstanten. Rešitev je premica, ki je vzporedna abscisni osi in seka ordinatno os pri $y = 4$.

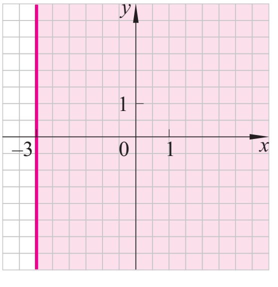


25. Katera izmed točk $A(2, -3)$, $B(-4, 4)$ in $C(2, 2)$ leži na premici z enačbo $y = x$?
Rešitev: Točka, ki leži na premici z enačbo $y = x$, mora imeti obe koordinati enaki, kar pove enačba $y = x$. Vidimo, da je to le točka C.

26. Nariši množico vseh točk (x, y), za katere je $x \geq -3$.
Rešitev: Najprej narišimo množico točk, ki zadoščajo enačbi $x = -3$. To je premica, ki je vzporedna ordinatni osi in seka abscisno os pri $x = -3$.



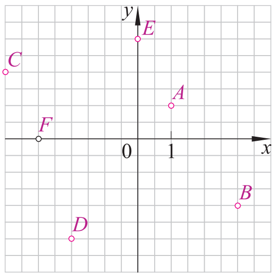
Neenakost $x \geq -3$ nam pove, da morajo biti abscise iskanih točk večje ali enake -3, ker pa ni danega pogoja za y, so ordinate lahko poljubne. Torej ležijo točke dane množice na narisani premici $x = -3$ ali pa desno od nje. Na sliki predstavimo te točke s senčenjem.



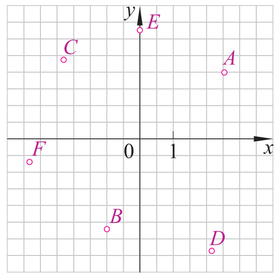
Rešitve

1. **a)** $A(2,0)$, $B(3,3)$, $C(1,-3)$, $D(0,2)$, $E(-4,-2)$, $F(-2,1)$, $G(-2,-3)$
b) $A(4,2)$, $B(3,6)$, $C(3,-5)$, $D(-5,0)$, $E(-5,-7)$, $F(-6,6)$, $G(-8,-3)$
c) $A(-3,2)$, $B(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2})$, $C(\frac{5}{2},-2)$, $D(1,-4)$, $E(\frac{5}{2},3)$, $F(0,\frac{5}{2})$, $G(-\frac{3}{2},0)$

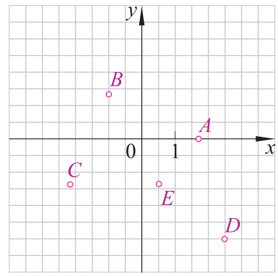
2. **a)**



b)



c)



3. **a)** C, D, E **b)** B, D **c)** A, D, F

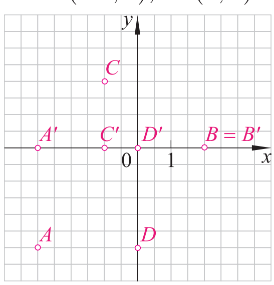
4. **a)** B, E **b)** A, E **c)** B, E

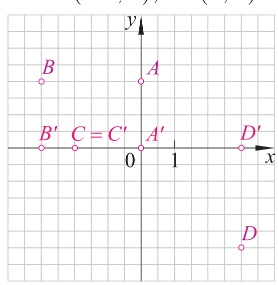
5. **a)** $a=-1$ **b)** $a=-\dfrac{2}{3}$ **c)** Takega a ni. **d)** $a_1=2$, $a_2=-2$

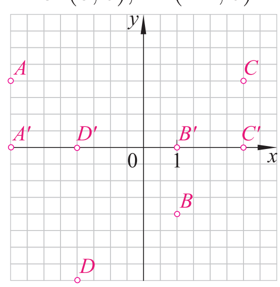
6. **a)** $a=-\frac{7}{3}$ **b)** $a=\frac{1}{2}$ **c)** $a_1=-1, a_2=1$ **d)** $a_1=-2, a_2=0$

7. **a)** A, E, B **b)** B, C **c)** Nobena.

8. **a)** $A'(-3,0)$, $B'(2,0)$, $C'(-1,0)$, $D'(0,0)$ **b)** $A'(0,0)$, $B'(-3,0)$, $C'(-2,0)$, $D'(3,0)$ **c)** $A'(-4,0)$, $B'(1,0)$, $C'(3,0)$, $D'(-2,0)$

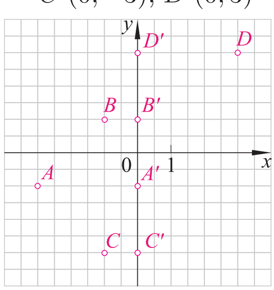


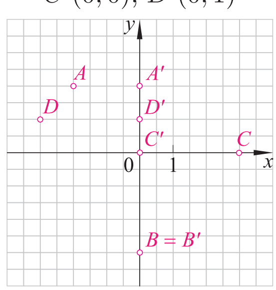


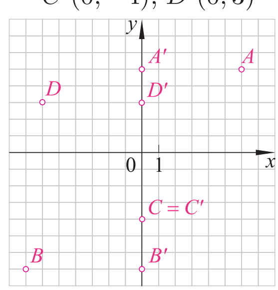


9. **a)** $A'(1,0)$, $B'(-7,0)$, $C'(0{\cdot}3,0)$, $D'(\frac{1}{2},0)$
b) $A'(2{\cdot}7,0)$, $B'(\pi,0)$, $C'(1-\sqrt{2},0)$, $D'(0,0)$
c) $A'(0,0)$, $B'(a,0)$, $C'(1-p,0)$, $D'(s,0)$

10. **a)** $A'(0,-1)$, $B'(0,1)$, $C'(0,-3)$, $D'(0,3)$ **b)** $A'(0,-2)$, $B'(0,-3)$, $C'(0,0)$, $D'(0,1)$ **c)** $A'(0,5)$, $B'(0,-7)$, $C'(0,-4)$, $D'(0,3)$







11. **a)** $A'(0,5)$, $B'(0,\pi)$, $C'(0,0)$, $D'(0,\frac{1}{2})$
b) $A'(0,2{\cdot}7)$, $B'(0,-\sqrt{2})$, $D'(0,0)$, $E'(0,1-\sqrt{3})$
c) $A'(0,q)$, $B'(0,p^2)$, $C'(0,a-b)$, $D'(0,c+1)$