Roman Brilej, Tatjana Robič

alfa

Eksponentna in logaritemska funkcija
Kotne funkcije

Zbirka nalog za matematiko v
srednjem strokovnem izobraževanju

Ljubljana 2014

Kazalo

1.1 Eksponentna funkcija

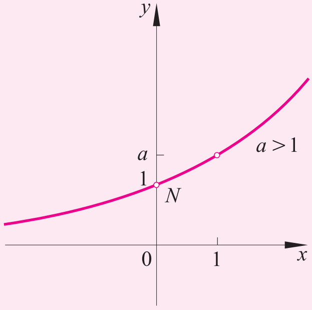
Eksponentna funkcija je realna funkcija oblike:

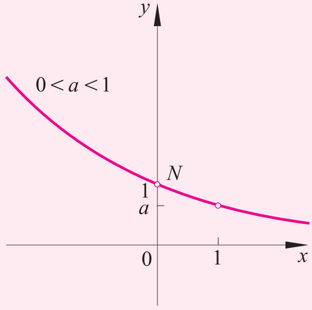
$$f(x) = a^x \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

Število a imenujemo **osnova** eksponentne funkcije. Kot osnova pogosto nastopa iracionalno število $e = 2{\cdot}71828\ldots$ To je tista osnova eksponentne funkcije, pri kateri tangenta na graf te funkcije v točki $N(0,1)$ seka abscisno os (in s tem seveda tudi ordinatno) pod kotom $45°$.

Lastnosti eksponentne funkcije:

- definicijsko območje so vsa realna števila: $D_f = \mathbb{R}$
- zaloga vrednosti je množica pozitivnih realnih števil: $Z_f = (0, \infty)$
- za $a > 1$ je naraščajoča, za $0 < a < 1$ je padajoča
- je injektivna
- vodoravna asimptota grafa funkcije je abscisna os
- graf funkcije poteka skozi točko $N(0,1)$





Zgledi

1. Natančno izračunaj $(3^{\sqrt{5}-1})^{\sqrt{5}+1}$.
Rešitev: Za potence z iracionalnimi eksponenti veljajo ista pravila kot za potence z racionalnimi oziroma celimi eksponenti. Uporabimo pravilo za potenciranje potence:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

V nadaljevanju potrebujemo še dobro znan obrazec:

$$\boxed{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$$

Tako imamo:

$$(3^{\sqrt{5}-1})^{\sqrt{5}+1} = 3^{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = 3^{(\sqrt{5})^2-1^2} = 3^{5-1} = 3^4 = 81$$

2. Natančno izračunaj: $9^{\pi+1} \cdot 27^{1-\pi} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3\pi+2}$.
Rešitev: Vse potence, ki nastopajo v računu, zapišimo z isto osnovo, in sicer 3:

$$\begin{aligned}
9^{\pi+1} \cdot 27^{1-\pi} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3\pi+2} &= (3^2)^{\pi+1} \cdot (3^3)^{1-\pi} \cdot (3^{-1})^{3\pi+2} = \\
&= 3^{2(\pi+1)} \cdot 3^{3(1-\pi)} \cdot 3^{-(3\pi+2)} = \\
&= 3^{2\pi+2} \cdot 3^{3-3\pi} \cdot 3^{-3\pi-2} = \\
&= 3^{2\pi+2+3-3\pi-3\pi-2} = 3^{3-4\pi}
\end{aligned}$$

3. Dani sta eksponentni funkciji $f(x) = 3^x$ in $g(x) = 27^x$. Izračunaj $g(f(-1))$.
Rešitev: Računajmo postopoma. Začnimo v notranjosti:

$$g(f(-1)) = g(3^{-1}) = g\left(\frac{1}{3}\right) = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$$

4. Določi osnovo a eksponentne funkcije $f(x) = a^x$, če je $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 125$.
Rešitev: Ker je $f\left(-\frac{3}{2}\right) = a^{-\frac{3}{2}}$, dobimo enačbo:

$$a^{-\frac{3}{2}} = 125$$

Osnova eksponentne funkcije je vselej pozitivna, zato lahko s potenciranjem obeh strani enakosti odpravimo eksponent na levi strani:

$$\begin{aligned}
(a^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}} &= 125^{-\frac{2}{3}} \\
a &= (5^3)^{-\frac{2}{3}} \\
a &= 5^{-2} \\
a &= \frac{1}{25}
\end{aligned}$$

5. Določi osnovo a eksponentne funkcije $f(x) = a^x$, če njen graf poteka skozi točko $T(2{\cdot}5, 32)$.
Rešitev: Ker graf funkcije $f(x) = a^x$ poteka skozi točko $T(2{\cdot}5, 32)$, velja:

$$f(2{\cdot}5) = 32$$

Od tod dobimo enačbo:

$$a^{2{\cdot}5} = 32$$

Osnova a je pozitivna, zato lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}
(a^{2{\cdot}5})^{\frac{2}{5}} &= 32^{\frac{2}{5}} \\
a &= (2^5)^{\frac{2}{5}} \\
a &= 2^2 \\
a &= 4
\end{aligned}$$

6. Katera izmed točk $A(2,3)$, $B(-2,-3)$, $C(-1,\sqrt{3})$ leži na grafu funkcije $f(x)=(\sqrt{3})^x$?
Rešitev: Točka $T(a,b)$ leži na grafu funkcije f, če velja:

$$b = f(a)$$

Da lahko odgovorimo na zastavljeno vprašanje, izračunajmo funkcijske vrednosti pri abscisah danih točk in jih primerjajmo z ordinatami:

$$A(2,3) : f(2) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$B(-2,-3) : f(-2) = (\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3}$$

$$C(-1,\sqrt{3}) : f(-1) = (\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vidimo, da je samo v primeru točke A vrednost funkcije f pri abscisi enaka ordinati. Torej leži na grafu funkcije f samo točka A.

7. Določi presečišče grafa funkcije $f(x)=(\sqrt{5})^x$ s premico $x=6$.
Rešitev: Abscisa presečišča je očitno $x=6$, ordinata pa:

$$f(6) = (\sqrt{5})^6 = ((\sqrt{5})^2)^3 = 5^3 = 125$$

Torej je presečišče točka $T(6,125)$.

8. Tabeliraj funkcijo $f(x)=(\sqrt{2})^x$ na intervalu $[-2,2]$ s korakom $h=1$ in na tem intervalu nariši njen graf.
Rešitev: Tabelirati funkcijo pomeni izračunati vrednosti funkcije v nekih točkah in vse to zapisati v tabeli oziroma preglednici. Tabeliranje začnemo kar v levem krajišču danega intervala. Izračunajmo:

$$f(-2) = (\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

Tako lahko par $x=-2$ in $y=\frac{1}{2}$ zapišemo v tabelo.

x	$y=f(x)$
-2	$\frac{1}{2}$

Pri kateri vrednosti spremenljivke x bomo nadaljevali, nam pove korak h. Od vrednosti $x=-2$ se premaknemo za $h=1$. Nova vrednost spremenljivke x je tako:

$$x = -2+1 = -1$$

Računajmo:

$$f(-1) = (\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{\cdot}7$$

Približno vrednost smo zapisali zato, ker jo bomo potrebovali za risanje. Kljub temu bomo ob ordinatni osi zapisali natančno vrednost.

Dopolnimo preglednico. V njej navedemo natančne vrednosti.

x	$y=f(x)$
-2	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Od $x = -1$ se premaknemo za $h = 1$ v desno, torej v $x = 0$. Izračunajmo:

$$f(0) = (\sqrt{2})^0 = 1$$

Tako naša preglednica vsebuje že tri pare.

x	$y = f(x)$
-2	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	1

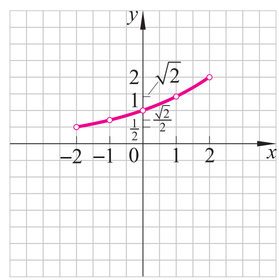
Izračunati moramo še dve vrednosti:

$f(1) = (\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$
$f(2) = (\sqrt{2})^2 = 2$

Zapišimo ju v preglednico.

x	y
-2	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	1
1	$\sqrt{2}$
2	2

Sedaj te točke narišimo v koordinatni sistem in skozinje potegnimo gladko krivuljo. Bodimo pozorni, da je naša naloga narisati graf funkcije f zgolj na intervalu $[-2, 2]$.



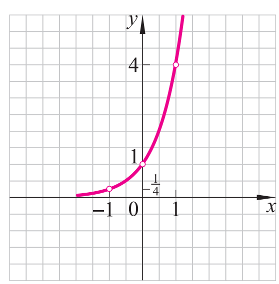
9. Nariši graf funkcije $f(x) = 4^x$.
Rešitev: Graf eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ navadno rišemo s tremi značilnimi točkami:

$$T_1(-1, a^{-1}), \quad T_2(0, 1), \quad T_3(1, a)$$

Upoštevajmo še, da je eksponentna funkcija naraščajoča in je abscisna os asimptota grafa na levi strani, če je osnova a večja od 1, oziroma je eksponentna funkcija padajoča in asimptota grafa na desni strani, če je osnova a manjša od 1 in seveda večja od 0.
V našem primeru graf poteka skozi točke:

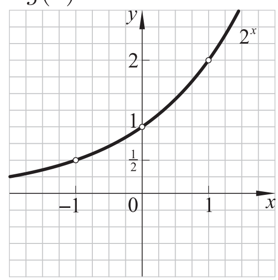
$$T_1(-1, \tfrac{1}{4}), \quad T_2(0, 1), \quad T_3(1, 4)$$

Na levi strani se približuje abscisni osi, na desni pa gre v neskončnost.



10. V isti koordinatni sistem nariši grafa funkcij $f(x) = 2^x$ in $g(x) = 2^{-x}$.
Rešitev: Najprej narišimo graf funkcije $f(x) = 2^x$. Poteka skozi značilne točke:

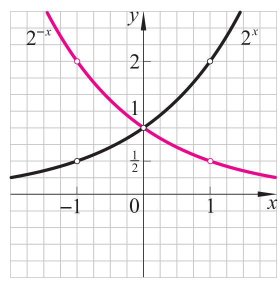
$$(-1, \tfrac{1}{2}), \quad (0, 1), \quad (1, 2)$$



Graf funkcije g dobimo s pomočjo grafa funkcije f, saj velja:

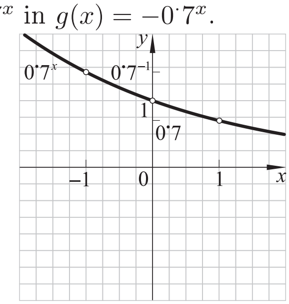
$$g(x) = f(-x)$$

Ta zveza nam pove, da graf funkcije f prezrcalimo čez ordinatno os in že dobimo graf funkcije g. Zrcaljenje najlažje izvedemo tako, da zrcalimo značilne točke, skozi katere poteka graf funkcije f.



11. V isti koordinatni sistem nariši grafa funkcij $f(x) = 0{\cdot}7^x$ in $g(x) = -0{\cdot}7^x$.
Rešitev: Graf funkcije f poteka skozi značilne točke:

$$(-1, 0{\cdot}7^{-1}), \quad (0, 1), \quad (1, 0{\cdot}7)$$



Pri risanju bomo ordinato prve točke zapisali približno:

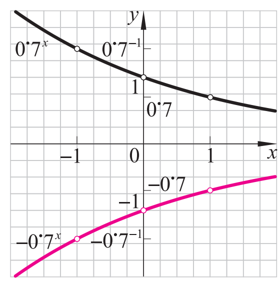
$$0{\cdot}7^{-1} \doteq 1{\cdot}4$$

Tako bomo vrednost $0{\cdot}7^{-1}$ zapisali ob črtico, ki predstavlja vrednost $1{\cdot}4$.

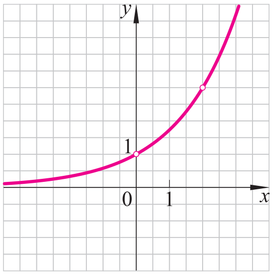
Graf funkcije g dobimo tako, da graf funkcije f prezrcalimo čez abscisno os, saj velja:

$$g(x) = -f(x)$$

Tudi tokrat to najlažje opravimo tako, da prezrcalimo značilne točke.



12. Določi eksponento funkcijo $f(x) = a^x$, katere graf je na sliki.



Rešitev: S slike lahko preberemo, da graf poteka skozi točko $(2, 3)$, torej velja:

$$a^2 = 3$$

Ker mora biti osnova a pozitivno število, je edina rešitev te enačbe $a = \sqrt{3}$ in tako iskana funkcija:

$$f(x) = (\sqrt{3})^x$$

13. Nariši graf funkcije $f(x) = 2^x + 1$.

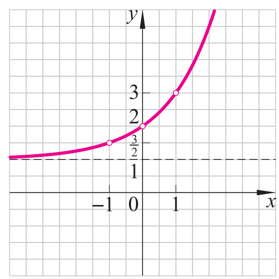
Rešitev: Graf funkcije f dobimo tako, da graf funkcije $g(x) = 2^x$ premaknemo za 1 navzgor. To lahko storimo s premikom značilnih točk:

$$(-1, \tfrac{1}{2}) \to (-1, \tfrac{3}{2})$$

$$(0, 1) \to (0, 2)$$

$$(1, 2) \to (1, 3)$$

Upoštevajmo še, da se asimptota $y = 0$ (abscisna os) premakne v premico $y = 1$.



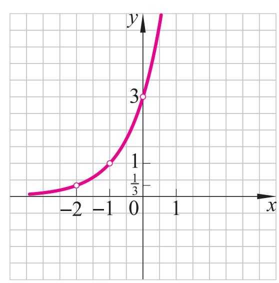
14. Nariši graf funkcije $f(x) = 3^{x+1}$.

Rešitev: Spomnimo se, da graf funkcije $y = g(x + a)$ pri nekem pozitivnem a dobimo tako, da graf funkcije $y = g(x)$ premaknemo za a v levo. Torej moramo v našem primeru prestaviti graf funkcije $g(x) = 3^x$ za 1 v levo. To opravimo s premikom značilnih točk:

$$(-1, \tfrac{1}{3}) \to (-2, \tfrac{1}{3})$$

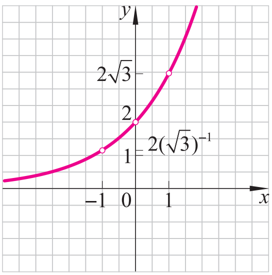
$$(0, 1) \to (-1, 1)$$

$$(1, 3) \to (0, 3)$$



15. Nariši graf funkcije $f(x) = 2 \cdot (\sqrt{3})^x$.

Rešitev: Graf funkcije $g(x) = (\sqrt{3})^x$ moramo raztegniti v smeri osi y za faktor 2. Pri značilnih točkah storimo to tako, da ordinate pomnožimo z 2:



$(-1, (\sqrt{3})^{-1}) \to (-1, 2(\sqrt{3})^{-1})$

$(0, 1) \to (0, 2)$

$(1, \sqrt{3}) \to (1, 2\sqrt{3})$

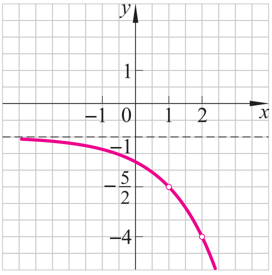
Asimptota ostane abscisna os.

16. Nariši graf funkcije $f(x) = -\dfrac{3}{2} \cdot 2^{x-1} - 1$.

Rešitev: Postopoma pišimo transformacije, ki smo jih spoznali v prejšnjih nalogah. Naredili jih bomo na zgolj dveh značilnih točkah, saj nam tudi ti dve zadoščata za približno sliko:

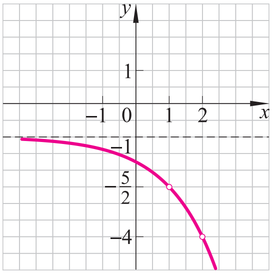
$y = 2^x$	$y = 2^{x-1}$	$y = -\frac{3}{2} \cdot 2^{x-1}$	$y = -\frac{3}{2} \cdot 2^{x-1} - 1$
$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(1, -\frac{3}{2})$	$(1, -\frac{5}{2})$
$(1, 2)$	$(2, 2)$	$(2, -3)$	$(2, -4)$

Asimptota $y = 0$ preide v premico $y = -1$. To premico narišimo črtkano, nato pa še točki $(1, -\frac{5}{2})$ in $(0, -4)$. Skozi potegnimo gladko krivuljo, ki se na levi približa asimptoti $y = -1$.



17. Nariši graf funkcije $f(x) = |2{\cdot}7^x - 1|$.

Rešitev: Najprej narišimo graf funkcije $g(x) = 2{\cdot}7^x - 1$. Tudi tokrat, tako kot v prejšnji nalogi, uporabimo samo dve značilni točki:

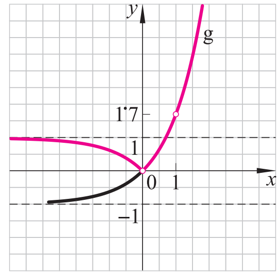


$(0, 1) \to (0, 0)$

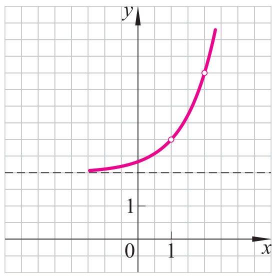
$(1, 2{\cdot}7) \to (1, 1{\cdot}7)$

Asimptota $y = 0$ preide v premico $y = -1$.

Graf funkcije $f(x) = |g(x)|$ dobimo tako, da tisti del grafa funkcije $g(x)$, ki leži pod abscisno osjo, prezrcalimo čez njo. Asimptota $y = -1$ grafa funkcije $g(x)$ preide v premico $y = 1$, ki je tako asimptota grafa funkcije f.



18. Določi funkcijo oblike $f(x) = a^{x+b} + c$, katere graf je na sliki.



Rešitev: S slike preberemo, da je premica $y = 2$ asimptota grafa naše funkcije. To pomeni, da je $c = 2$. Nadalje vidimo, da graf poteka skozi točki:

$$T_1(1,3) \qquad \text{in} \qquad T_2(2,5)$$

Torej lahko zapišemo:

$$f(1) = 3 \qquad \text{in} \qquad f(2) = 5$$

Upoštevajmo, da je funkcija f oblike $f(x) = a^{x+b} + c$ in da je $c = 2$. Tako dobimo enačbi:

$$a^{1+b} + 2 = 3 \qquad \text{in} \qquad a^{2+b} + 2 = 5$$

Enačbi uredimo:

$$\begin{aligned} a^{1+b} &= 1 \\ a^{2+b} &= 3 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi:

$$1 + b = 0$$

Od tod je $b = -1$. Vstavimo to v drugo enačbo:

$$\begin{aligned} a^{2+(-1)} &= 3 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Tako je končna rešitev:

$$f(x) = 3^{x-1} + 2$$

Rešitve

1. **a)** 1˙09 **b)** 1˙60 **c)** 11˙0 **d)** 762 **e)** 0˙549 **f)** 0˙460
g) 0˙646 **h)** 19˙8 **i)** 15˙2 **j)** 4˙55 **k)** 1˙41 **l)** 1˙00 **m)** 0˙194 **n)** 0˙0714

2. **a)** 25 **b)** 32 **c)** 16 **d)** 81 **e)** 36 **f)** 49 **g)** 2 **h)** 81 **i)** π

3. **a)** 9 **b)** 5 **c)** $\dfrac{1}{4}$ **d)** $3^{-\sqrt{2}}$ **e)** $2^{2\pi-3}$ **f)** $10^{-\sqrt{3}}$

4. **a)** 0 **b)** 1 **c)** 45 **d)** 6 **e)** 2 **f)** 4

5. **a)** $a = 2$ **b)** $a = 5$ **c)** $a = 36$ **d)** $a = 27$ **e)** $a = 4$ **f)** $a = 8$ **g)** $a = \sqrt[5]{4}$
h) $a = \sqrt[3]{9}$ **i)** $a = \dfrac{1}{10}$ **j)** $a = \sqrt{2}$ **k)** $a = 49$ **l)** Ne obstaja.

6. **a)** $a = 6$ **b)** $a = 0˙5$ **c)** $a = 4$ **d)** $a = \dfrac{9}{4}$ **e)** $a = \sqrt{3}$ **f)** $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7. **a)** B **b)** Vse. **c)** Nobena. **d)** A, C **e)** B, C **f)** A, B

8. P(4,9)

9. **a)**

x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81

b)

x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{216}$
-2	$\frac{1}{36}$
-1	$\frac{1}{6}$
0	1
1	6
2	36

c)

x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{16}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$
-1	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	2
1	4
$\frac{3}{2}$	8
2	16

d)

x	$f(x)$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{2}{3}$	9
1	27
$\frac{4}{3}$	81
$\frac{5}{3}$	243

e)

x	$f(x)$
-8	256
-6	64
-4	16
-2	4
0	1
2	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$
6	$\frac{1}{64}$

f)

x	$f(x)$
-2	25
-1	5
0	1
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{25}$

g)

x	$f(x)$
-1	$\frac{81}{16}$
$-\frac{3}{4}$	$\frac{27}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
0	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{16}{81}$

h)

x	$f(x)$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$
-1	$\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
1	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{4}$