Roman Brilej, Boro Nikič

OMEGA 3

Polinomi in racionalne funkcije, stožnice

Zbirka nalog za matematiko v 3. letniku gimnazijskega izobraževanja

Ljubljana 2013

Kazalo

1.1 Definicija polinoma, seštevanje in množenje

Polinom p je realna funkcija oblike:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Realna števila $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ so koeficienti polinoma p.

Pri tem je $a_n \neq 0$, razen v primeru, ko so vsi koeficienti enaki 0 (ničelni polinom). Koeficient a_n imenujemo **vodilni koeficient**, člen $a_n x^n$ pa **vodilni člen**. Koeficient a_0 je **prosti koeficient** ali **prosti člen**. Število n je **stopnja** polinoma. Označimo jo z $n = \mathrm{st}(p)$.

Pogosto obravnavamo polinom p kot kompleksno funkcijo $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ z realnimi koeficienti, včasih pa tudi s kompleksnimi koeficienti.

Vsota $p + q$ polinomov p in q je polinom, katerega koeficienti so vsote istoležnih koeficientov polinomov p in q. **Razlika** $p - q$ polinomov p in q je polinom, katerega koeficienti so razlike istoležnih koeficientov polinomov p in q.

Produkt pq polinomov p in q je polinom, ki ga dobimo, če polinoma p in q zmnožimo kot veččlenika. Stopnja produkta je enaka vsoti stopenj posameznih faktorjev.

1. Za dano funkcijo ugotovi, ali je polinom:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$
b) $f(x) = -3x^2 - x - 2$
c) $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 3x$
d) $f(x) = -5x^3 + 2x + 1$
e) $f(x) = 6x^7 + 5x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$
f) $f(x) = 2x^{-3}$
g) $f(x) = 2x^{-4} + 3x^{-3} - 2x^{-1} - 4$
h) $f(x) = -3x^{111} - 7$
i) $f(x) = \log_2 x$
j) $f(x) = \log^3 x + \log^2 x - \log x - 1$
k) $f(x) = -3$
l) $f(x) = 5x + 1$
m) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$
n) $f(x) = \sqrt{5}x^3 + \sqrt{2}x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt{5}$
o) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} - 2$
p) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - x^4$

2. Določi stopnjo, vodilni koeficient, vodilni člen in prosti člen polinoma $p(x) =$:

a) $5x^2 + 2x - 3$
b) $-2x^2 - x + 7$
c) $4x^3 + 3x^2 - 5x + 1$
d) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
e) $-x^4 + 2x^2 + 2$
f) $2x^4 + x^3 - x^2 + 4x$
g) $x^8 + 2x^5 - 11x^3 - x$
h) $4x - 1$
i) $-x^4$
j) 2
k) $3x^2 + 1 - x^4$
l) $2x + 2x^6$
m) $-\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x + 4$
n) $-x^5 + x^2 - 3x - \frac{5}{2}$
o) $2{\cdot}25x^3 - 1{\cdot}5x + 0{\cdot}5$
p) $\sqrt{2}x^3$
r) $\sqrt{5}x^2 - 2x - \sqrt{2}$
s) $\sqrt[3]{1+\pi}x^4 - e^3x^3 + \pi^2x^2 + 2e$

3. Seštej polinoma:

a) $x^3 + 2x$ in $x^2 + 3x + 1$
b) $2x^3 + x^2 - 2$ in $x^4 - 2x^2 + 4x$
c) $x^3 - 2$ in $x + 4$
d) $-3x^4 + 2x^2$ in $2x^3 + 5x - 1$
e) $x^2 + 3x + 1$ in $x^2 + x - 2$
f) $-x^2 + 4x - 3$ in $x^2 - 2x - 2$
g) $2x^3 + 4x^2 - 1$ in $-5x^3 + 6x$
h) $6x^7 + 4x^3 + 2x$ in $5x^3 + 2x^2 - 4$
i) $5x^4 - 3x^3 + 2x - 4$ in $-5x^4 + 2x^3 + 6x^2$
j) $5x^7 + 3x^6 - 2x^2 + 1$ in $-3x^6 + 2x^2 - 1$
k) $x^4 + x^2 + 1$ in $-x^3 - x$
l) $-2x^6 + 4x^3 - 2$ in $2x^6 - 4x^3 + 5$
m) $4x^4 - 2x^2 - 5x$ in $-4x^4 + 2x^2 + 5x$
n) $\frac{1}{2}x^3 + 4x - \frac{7}{3}$ in $\frac{1}{2}x^3 + 6x^2 + \frac{1}{3}$
o) $5x^5 + 4x^3 + \frac{7}{5}x$ in $-2x^4 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$
p) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$ in $2x^3 - \frac{3}{4}$
r) $\frac{3}{2}x^3 + 2x - \frac{1}{3}$ in $-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$
s) $4x^8 + \frac{2}{7}x^6 + 8x^3 - \frac{1}{3}x + 4$ in $\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{5}x$
t) $2\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^2 - \sqrt{7}$ in $-3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{5}x$
u) $\sqrt{3}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + 2$ in $x^4 + x^3 - 4\sqrt{3}x$

4. Odštej polinoma:

a) $2x^3 + 3x$ in $x^2 + x - 3$
b) $2x^3 + x^2 - 2$ in $x^4 - 2x^2 + 4x$
c) $2x^3 - 1$ in $x + 3$
d) $-x^4 + 2x^2$ in $4x^3 + 5x - 1$
e) $x^2 + 3x + 1$ in $-x^2 + x - 2$
f) $x^2 + 4x - 3$ in $x^2 - 2x - 2$
g) $2x^3 + 4x^2 - 1$ in $-5x^3 + 5x$
h) $3x^7 - 3x^6 + 2x^2$ in $-3x^6 + 2x^2$
i) $-5x^4 + 3x^3 + 2x - 4$ in $-5x^4 + 2x^3 - 6x^2$
j) $6x^7 + x^3 + 2x$ in $5x^3 + 2x^2 - 4$
k) $x^4 + x^2 + 1$ in $-x^3 - x$
l) $-4x^6 + 8x^3 + 2x$ in $-4x^6 + 2x$
m) $4x^4 - 2x^2 - 5x$ in $-4x^4 + 2x^2 + 5x$
n) $\frac{3}{2}x^3 + 6x - \frac{7}{3}$ in $\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + \frac{2}{3}$
o) $3x^5 + 4x^3 - \frac{6}{5}x$ in $-2x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{5}x$
p) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{5}x$ in $2x^3 - \frac{3}{4}$
r) $\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3}$ in $-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{6}$
s) $3x^{10} + 2x^7 - x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4x$ in $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7$
t) $2\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^2 - \sqrt{7}$ in $-3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{5}x$
u) $\sqrt{3}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + 2$ in $x^4 + \sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x - 5$

5. Dani so polinomi $p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$, $q(x) = 2x^4 - 2x^2 - x - 1$ in $r(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 4$. Izračunaj:

a) $p(x) + q(x)$
b) $p(x) + r(x)$
c) $q(x) - r(x)$
d) $p(x) - r(x)$
e) $p(x) + r(x) + q(x)$
f) $p(x) - r(x) - q(x)$
g) $2 \cdot p(x) - q(x)$
h) $q(x) + 4 \cdot r(x)$
i) $2 \cdot r(x) - 3 \cdot p(x)$
j) $4 \cdot p(x) - 2 \cdot q(x)$
k) $q(x) - (2 \cdot p(x) - 2r(x))$
l) $5 \cdot p(x) - (3 \cdot r(x) - 2q(x))$

6. Izračunaj produkt polinomov:

a) $2x^2 - 3x + 1$ in $x - 2$
b) $-3x^2 + x - 4$ in $x + 2$
c) $2x^2 - 1$ in $3x$
d) $x^3 + 2x^2$ in $x^2 + 4x - 1$
e) $x^4 - 2x^3 + 4$ in $-x + 3$
f) $2x^2 + 4x - 1$ in $-2x^2 + 4x + 3$
g) $-x^3 + 2x^2 - x$ in $x^2 - 6x + 1$
h) $x^3 + 2x$ in $x^4 - 2x^2 - 1$
i) $x^5 - x^2$ in $x^5 + x^2$
j) $x^6 - 1$ in $x^6 + 1$
k) $x + 5$ in $x^2 - 5x + 25$
l) $x - 6$ in $x^2 + 6x + 36$
m) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^2 - 1$ in $8x^2 + 4x - 12$
n) $3x^2 + 12x$ in $x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}$
o) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ in $3x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 2x$
p) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ in $-\frac{3}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^3$
r) $-x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2x$ in $2x^2 + 4$
s) $x^3 - 1$ in $x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 3$
t) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}$ in $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{6}$
u) $\sqrt{5}x^3 + 2\sqrt{2}x - 1$ in $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{10}x + 1$

7. Naj bo $p(x) = -3x^2 + x - 2$ in $q(x) = x + 1$. Določi stopnjo, vodilni koeficient, vodilni člen in prosti člen polinoma:

a) $p(x) + q(x)$
b) $p(x) - q(x)$
c) $q(x) - p(x)$
d) $3p(x) + 2q(x)$
e) $p(x) + 3x \cdot q(x)$
f) $p(x) \cdot q(x)$
g) $(p(x))^2$
h) $(q(x))^2$
i) $(q(x))^3$
j) $-2 \cdot p(x) - 4(q(x))^3$
k) $(p(x))^2 + (q(x))^2$
l) $-2x((p(x))^3 + (q(x))^5)$
m) $(p(x))^5 + 3(q(x))^{11} - (p(x) + 2q(x))^4$

8. Izračunaj vrednost polinoma p v danih točkah:

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3;\ x = 0, -1, 1, 2$
b) $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1;\ x = 0, -1, -2, \sqrt{3}$
c) $p(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1;\ x = -1, 1, 2, \frac{1}{2}$
d) $p(x) = 2x^4 - 6x^2 - 3x + 1;\ x = -2, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \sqrt{2}$
e) $p(x) = x^9 - 4x^8 + 2x^3 - 2x^2;\ x = 0, \sqrt[3]{3}, -i, i$
f) $p(x) = x^4 + x^2 - 2x + 6;\ x = 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 1 + i, 1 - i$
g) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 2x;\ x = -1 + 2i$
h) $p(x) = (2 + \sqrt{3})x^3 - \sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}x;\ x = 2 - \sqrt{3}$

9. Dan je polinom $p(x) = -x^3 + 2x + 4$. Zapiši:

a) $p(-x)$
b) $p(x + 1)$
c) $p(\frac{x}{2})$
d) $2p(x - 1) + p(x^2) - 1$
e) $p(x) + p(-x) - 8$

10. Določi polinom p druge stopnje, če veš, da je:

a) $p(1) = 2,\ p(-1) = -6,\ p(0) = -3$
b) $p(1) = -6,\ p(4) = 0,\ p(0) = -4$
c) $p(2) = 2,\ p(-1) = \frac{7}{2},\ p(0) = 1$
d) $p(-1) = 9,\ p(1) = 1,\ p(2) = 3$

e) $p(1) = 2$, $p(-2) = -10$, $p(2) = -6$ **f)** $p(3) = 6$, $p(-6) = 15$, $p(2) = \dfrac{13}{3}$

$\ast$**g)** $p(0) = 3$, $p(i) = 2 - 2i$ $\ast$**h)** $p(-1) = 9$, $p(1+i) = 1 + i$

$\ast$**i)** $p(\sqrt{2}) = 2$, $p(2i) = 2 - 4\sqrt{2} - 4i$

$\ast$**j)** $p(1+\sqrt{3}) = 2, p(-2+i) = 1 - (3+\sqrt{3})i$

11. Določi polinom tretje stopnje z realnimi koeficienti, če veš, da je:

a) $p(1) = 1$, $p(-1) = 1$, $p(2) = 1$, $p(0) = -1$

b) $p(1) = -3$, $p(2) = 11$, $p(3) = 49$, $p(0) = -5$

$\ast$**c)** $p(2) = -3$, $p(-2) = -23$, $p(3) = 7$, $p(-1) = -9$

$\ast$**d)** $p\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $p(2) = 6$, $p(-1) = -\dfrac{3}{2}$, $p\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$

$\ast$**e)** $p(0) = \dfrac{1}{2}$, $p(1) = 2$, $p(-i) = -3i$

$\ast$**f)** $p(-1) = -2$, $p(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$, $p(1+2i) = -10$

12. Izračunaj vsoto koeficientov polinoma $p(x) =$:

a) $x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ **b)** $(x^3 - 4x + 1)^5$ **c)** $-2(x-2)^7$

d) $(2x^3 - 7x^2 + 3x + 3)^{21}(5x^2 - x - 5)^{31}(x^4 - 2x^2)^{42}$

e) $(x+1)^4 - (x-1)^4 + (2x-1)^5$

f) $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3)^3(x^2 + x - 3)^4 + 3(x+1)^5(2x^5 - 3x^3 + 2)^{10}$

13. Določi polinom druge stopnje z vodilnim koeficientom -1, prostim členom 2 in vsoto koeficientov 5.

14. Določi polinom tretje stopnje, pri katerem je vodilni koeficient dvakrat večji od prostega člena, vsota koeficientov 5 ter $p(0) = 2$ in $p(-1) = 3$.

$\ast$**15.** Poišči vse polinome p, za katere velja:

a) $p(x+1) = x^2 - 3x + 1$ **b)** $p(2x-1) = 2x^3 - 4x^2 + x + 3$

c) $p(x-1) = -x^3 + x^2 + 4$ **d)** $p(2x+3) = 4x^2 + 12x$

$\ast$**16.** Poišči vse polinome p, za katere velja $(x^2 + x)p(x+1) = p(x^2 + 1)$

$\ast\ast$**17.** Dokaži, da ne obstaja polinom s celimi koeficienti, za katerega bi veljalo $p(1) = 4$ in $p(3) = 5$.

□**18.** Naj bo $p(z) = (1+i)z^3 + 2z^2 - iz + 1$ in $q(z) = (1-i)z^2 - 2z + 2i$. Izračunaj:

a) $(1+i)p(z)$ **b)** $p(z) - 2iq(z)$ **c)** $p(z) + q(z)$ **d)** $(q(z))^2$

e) $p(z)q(z)$ **f)** $(1-i)q(z) - (1+i)zq(z)$

□**19.** Izračunaj vrednost polinoma p v danih točkah:

a) $p(z) = (2-i)z^2 + 3iz - 2i;\ z = 0, -1, 1, 2$

b) $p(z) = -3z^3 - 2iz^2 + 2iz - 3;\ z = 0, 1, \sqrt{2}, i$

c) $p(z) = (3-2i)z^4 + 2iz - 2;\ z = i, -2i, 1+i, 1-i$

d) $p(z) = (2+i)z^2 + (3-i)z + 1 - i;\ z = 3i, 2-i, \sqrt{2}+i, 1-\sqrt{2}i$

□**20.** Določi polinom p druge stopnje s kompleksnimi koeficienti, če veš, da je:

a) $p(1) = -2$, $p(i) = -1 - i$, $p(1+i) = -1$

b) $p(0) = 2 + 2i$, $p(i) = 0$, $p(2-i) = 2 + 2i$

c) $p(i) = 1 + i$, $p(-i) = 1 + i$, $p(1 - i) = -3 - i$

d) $p(1) = 6$, $p(2 + i) = 17 + 15i$, $p(3 - 2i) = 16 - 42i$

□**21.** Določi polinom p tretje stopnje s kompleksnimi koeficienti, če veš, da je:

a) $p(0) = 1$, $p(-1) = 2 - 2i$, $p(1) = 2 + 2i$, $p(i) = 0$

b) $p(0) = 2 + i$, $p(1) = 4 + 2i$, $p(i) = 3 - i$, $p(1 + i) = -2 + 3i$

c) $p(-i) = -2 + i$, $p(i) = -i$, $p(1 - i) = -1 - 4i$, $p(1 + i) = -5$

d) $p(-i) = -1 - i$, $p(i) = -1 + i$, $p(2i) = 2 - 4i$, $p(1 + i) = -2 + 2i$

1.2 Deljenje polinomov

Za poljubna polinoma p in $q \neq 0$ obstajata taka enolično določena polinoma k in r, da velja:

$$p(x) = k(x)q(x) + r(x) \qquad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(q) \text{ ali } r = 0$$

To trditev imenujemo **osnovni izrek o deljenju polinomov**. Polinom k imenujemo **kvocient** (količnik), polinom r pa **ostanek** pri deljenju polinoma p s polinomom q.

Polinom p je **deljiv** s polinomom q (polinom q deli polinom p), če je ostanek pri deljenju enak ničelnemu polinomu.

22. Deli:

a) $(x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$
b) $(x^2 - 4x + 4) : (x - 2)$
c) $(x^3 + x^2 + x + 4) : (x^2 - 2x + 2)$
d) $(x^3 + 2x^2 + 4x + 3) : (x + 1)$
e) $(2x^4 - 3x^2 + 6x - 2) : (x + 2)$
f) $(2x + 1) : (x - 3)$
g) $x^5 : (x^3 + 3x - 1)$
h) $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 6) : (x^3)$
i) $(x + 3) : (x^2 - 4x + 5)$
j) $x^3 : (x^5 - 1)$
k) $(-4x^2 + 5x + 2) : (x - 3)$
l) $(-3x^3 + 2x^2 + x) : (x + 4)$
m) $(x^4 - 1) : (-x + 1)$
n) $(6x^3 + 4x^2 + 8x) : (-2x + 4)$
o) $(x^2 + x^6) : (x^4 - 2x^2 + 3)$
p) $(4x^3 + 2x^2 + 2x - 4) : (2x - x^2 + 1)$
r) $(-3x^2 - 2x + 4) : (x - 1)^2$
s) $(x - 1)^3 : (x + 1)^3$
t) $(2x^3 + 3x^2 + 5x + 4) : (\frac{1}{2}x^2 + x + 1)$
u) $(5x^2 - 3x - 1) : (-3x + 2)$
∗v) $(2x^3 - 2ax^2 + (a^2 + 1)x + 2a + 3) : (x + 1)$
∗z) $(a^2x^4 + (a^3 + 1)x^2 - 3a) : (x^2 + ax + 1)$

23. Ugotovi, ali je polinom p deljiv s polinomom q:

a) $p(x) = x^2 - 3x - 4$, $q(x) = x - 4$

b) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$, $q(x) = x - 2$

c) $p(x) = x^2 + 5x + 4$, $q(x) = x + 3$
d) $p(x) = x^3 - 1$, $q(x) = x + 2$

e) $p(x) = x^3 + 2x^2$, $q(x) = x^2 + 4x - 1$
f) $p(x) = 6x^2 - 3x$, $q(x) = 2x^2 - 1$

g) $p(x) = -4x^4 + 24x^2 + 8x - 3$, $q(x) = 2x^2 + 4x - 1$

h) $p(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 7,\ q(x) = x^2 - 1$

i) $p(x) = x^5 - 2x^4 + x,\ q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$

j) $p(x) = 4x^6 - 12x^3 + 9,\ q(x) = 2x^3 - 3$

$*$**k)** $p(x) = ax^4 - (2a+1)x^3 + a^2x^2 + x + a + 1,\ q(x) = x - 1,\ a \in \mathbb{R}$

$*$**l)** $p(x) = -ax^2 + (a^2 - b)x + ab,\ q(x) = x - a,\ a \in \mathbb{R}$

24. Deli polinom p s polinomom q in le-to zapiši v obliki osnovnega izreka o deljenju:

a) $p(x) = x^2 + 2x + 2,\ q(x) = x + 1$ **b)** $p(x) = x^2 + 3x - 1,\ q(x) = x - 2$

c) $p(x) = x^3 - x,\ q(x) = x + 2$ **d)** $p(x) = x^3 - 5x + 4,\ q(x) = x - 1$

e) $p(x) = x^2 - x + 1,\ q(x) = x^3 - 2x^2$ **f)** $p(x) = x^5 + 3x^3 - 4x,\ q(x) = x^3 + 4x$

g) $p(x) = -5x^3 + 4x^2 + 5x - 4,\ q(x) = x^2 - 1$

h) $p(x) = x^3 + 4x - 2,\ q(x) = x^2 + x - 2$

i) $p(x) = 6x^3 + x^2 - 2,\ q(x) = -x^2 - 4x + 1$

j) $p(x) = x^4,\ q(x) = x^3 + x^2 + 2x - 2$

25. Določi polinom p, ki da pri deljenju s polinomom q količnik k in ostanek r:

a) $q(x) = x - 2,\ k(x) = x + 3,\ r(x) = 1$

b) $q(x) = x - 4,\ k(x) = x - 2,\ r(x) = 7$

c) $q(x) = x + 2,\ k(x) = x^2 - x + 1,\ r(x) = -4$

d) $q(x) = 2x - 1,\ k(x) = x + 2,\ r(x) = 0$

e) $q(x) = x^2 - 1,\ k(x) = x^2 + x - 1,\ r(x) = x - 3$

f) $q(x) = x^3 + x^2 + 2,\ k(x) = -x + 2,\ r(x) = x^2 - 1$

g) $q(x) = x^2 - 1,\ k(x) = x^3 + x + 2,\ r(x) = 0$

h) $q(x) = 2x^2 + 4x - 1,\ k(x) = 0,\ r(x) = x + 4$

26. S katerim polinomom moraš deliti polinom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 4$, da dobiš količnik $k(x)$ in ostanek $r(x)$, če je:

a) $k(x) = x - 1;\ r(x) = 0$ **b)** $k(x) = x + 2;\ r(x) = -18$

c) $k(x) = 2x - 3;\ r(x) = -5x + 7$ **d)** $k(x) = -\dfrac{2}{3};\ r(x) = -3x^2 - x$

$*$**27.** Določi tako število a, da bo polinom p deljiv s polinomom q:

a) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + a,\ q(x) = x - 2$

b) $p(x) = 3x^3 + x^2 - 3x + a,\ q(x) = x^2 - 1$

c) $p(x) = x^4 + ax^2 + 3,\ q(x) = x + 1$

d) $p(x) = x^3 + ax^2 - 2x + 1,\ q(x) = x^2 - 3x + 1$

$*$**28.** Določi taki števili a in b, da bo polinom p deljiv s polinomom q:

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b,\ q(x) = x^2 - 1$

b) $p(x) = 3x^3 + ax^2 - 5x + b,\ q(x) = x^2 - x - 2$

c) $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2,\ q(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax - 1,\ q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$*$**29.** Določi taki realni števili a in b, da bo polinom $p(x) = 2x^{17} - 3x^{16} + ax^{15} + bx^{14}$ deljiv s polinomom:

a) $q(x) = x^2 - 4$ **b)** $q(x) = x^2 + 4$

$**$**30.** Določi take vrednosti parametrov a, b, c, d, da bosta polinoma $p(x) = x^3 + ax^2 + 7x - 10$ in $q(x) = x^3 + bx^2 - 4x + 12$ deljiva s polinomom $s(x) = x^2 + cx + d$.

□**31.** Deli:

a) $(x^2 + 4x + 3) : (x + i)$ **b)** $(x^3 + 2x^2 - 6x + 8) : (x - 1 + i)$
c) $(2x^2 + x - 2) : (x - i)^2$ **d)** $(iz^2 + (1 - i)z + 2) : (z - 2)$
e) $(z^3 + (2-i)z^2 + 4i) : (z^2 - 3iz + 1 - i)$ **f)** $(iz^3 - (4-i)z + 4 + 2i) : (z - 1 + 2i)$

1.3 Ničle polinoma

Število x_0 je **ničla** polinoma p, če je $p(x_0) = 0$, to pa je natanko takrat, ko je $p(x)$ deljiv z $x - x_0$. Pravimo, da je x_0 ***k*-kratna ničla** (ničla k-te stopnje) polinoma p, če je

$$p(x) = (x - x_0)^k q(x) \qquad q(x_0) \neq 0$$

Polinom n-te stopnje ima največ n ničel.

32. Izračunaj vrednost polinoma p v danih točkah:

a) $p(x) = 3x^4 + x^3 - 2x - 2$; $x = 0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$
b) $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2$; $x = 0, 1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$
c) $p(x) = \sqrt{3}x^3 - 2x^2 - 3$; $x = 0, -2, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \sqrt{3}$
d) $p(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2(x - 2)$; $x = 0, 1, -1, 2, -2, 4, \frac{3}{2}$
e) $p(x) = x^2(x - 1)^3(x - 2)^2(x + 3)$; $x = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$
f) $p(x) = x^2(x - i)(x + i)(x + 2 - 3i)(x + 2 + 3i)$; $x = 1, -2, i, -i, -2 - 3i, 1 + i$

33. Dana sta polinoma $p(x) = 2x^2 - 3x + 7$ in $q(x) = x^3 + x - 3$. Izračunaj:

a) $p(0) + q(0)$ **b)** $q(1) - p(1)$ **c)** $2 \cdot p(-1) + 3 \cdot q(1)$
d) $p(2) + 9 \cdot q(1)$ **e)** $5 \cdot q(2) - 2 \cdot p(3)$ **f)** $p(4) - (q(-1))^2$
g) $p(\frac{1}{2})q(1)^3$ **h)** $p(\sqrt{2}) + q(\sqrt{2})$ **i)** $p(2 - i) - 2q(i)$
j) $p(a - 1) + q(-a)$ **k)** $ap(a + 1) - q(a - 1)$
l) $p(a^3) - 2a^3\left(q(a) - a + \frac{3}{2}\right) - 7$

34. Ugotovi, ali je število -2 ničla polinoma $p(x) =$:

a) $x^2 - 4x + 4$ **b)** $x^3 + 4x^2 + 4x$
c) $x^4 - x^3 + 8x - 8$ **d)** $x^5 + 3x^3 - x^2 + 32$
e) $x^5 + 3x^4 + 4x^2 + 10x - 12$ **f)** $x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x$

35. Ugotovi, ali je število $-2+i$ ničla polinoma:

a) $p(x)=x^2+4x+5$

b) $p(x)=2x^2-4x+1$

c) $p(x)=-x^3+x^2$

d) $p(x)=2x^4+8x^3+9x^2-4x-5$

□ **e)** $p(z)=iz^3+(3-i)z^2+4-3i$

□ **f)** $p(z)=iz^3+(-1+4i)z^2+(-4+5i)z-5$

□ **g)** $p(z)=(3-i)z^2+(2-3i)z-4+7i$

□ **h)** $p(z)=3z^4+(2-i)z-11i$

36. Zapiši vse ničle danega polinoma in določi njihovo večkratnost:

a) $p(x)=(x-1)^2$

b) $p(x)=(x+2)^2$

c) $p(x)=(x-2)^3$

d) $p(x)=(x+3)^3$

e) $p(x)=(x-4)^{11}$

f) $p(x)=(x+2)^{12}$

g) $p(x)=(x+5)^{87}$

h) $p(x)=x-6$

i) $p(x)=-\frac{1}{2}x$

j) $p(x)=3x^2$

k) $p(x)=(x+1)(x-2)$

l) $p(x)=x\cdot(x+3)$

m) $p(x)=-4x(x+5)(x+2)$

n) $p(x)=x^2(x-1)(x-3)$

o) $p(x)=(x+3)^2(x-2)$

p) $p(x)=(x+1)^2(x-1)^3(x+2)^6$

r) $p(x)=x(x+1)^4(x-2)^4(x+2)^5$

s) $p(x)=-\frac{3}{2}x^3(x-1)^5(x+1)^8(x+3)^6(x-8)$

t) $p(x)=x(x+3)^4(x-3i)(x+3i)$

u) $p(x)=x^2(x-1)(x+3)(x+3-i)(x+3+i)$

v) $p(x)=(x-\sqrt{2})^3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x-5-2i)^2(x-5+2i)^2$

z) $p(x)=(x-1)^2(x+2-\sqrt[3]{5})^4\left(x-\frac{i}{2}\right)^3\left(x+\frac{i}{2}\right)^3$

37. Določi ničle polinoma p tako, da ga razcepiš:

a) $p(x)=x^2-1$

b) $p(x)=x^2-9$

c) $p(x)=x^3-25x$

d) $p(x)=x^4-49x^2$

e) $p(x)=-2x^3+200x$

f) $p(x)=x^2-2$

g) $p(x)=x^3-5x$

h) $p(x)=x^2-2x-3$

i) $p(x)=x^2+4x+4$

j) $p(x)=x^3+5x^2-6x$

k) $p(x)=x^4-8x^3+16x^2$

l) $p(x)=-2x^2+2x+12$

m) $p(x)=-3x^5-9x^4+120x^3$

n) $p(x)=x^3+x^2-25x-25$

o) $p(x)=x^3-2x^2-4x+8$

p) $p(x)=5x^6-3x^5-5x^4+3x^3$

r) $p(x)=x^4-5x^2+4$

s) $p(x)=x^4-13x^2+36$

t) $p(x)=x^6-7x^4+12x^2$

u) $p(x)=x^3-9x^2+27x-27$

38. Reši enačbo:

a) $x^3+x=0$

b) $x^4+4x^2=0$

c) $3x^2-5x+2=0$

d) $2x^2+x-1=0$

e) $2x^5+5x^4-3x^3=0$

f) $-3=0$

g) $x^2+x+3=0$

h) $2x^4-3x^3+2x^2=0$

i) $x^2-2x-2=0$

Rešitve

1. **a)** Da. **b)** Da. **c)** Da. **d)** Da. **e)** Da. **f)** Ne. **g)** Ne. **h)** Da. **i)** Ne. **j)** Ne. **k)** Da. **l)** Da. **m)** Ne. **n)** Da. **o)** Ne. **p)** Da.

2.

	Stopnja	Vodilni koeficient	Vodilni člen	Prosti člen
a)	2	5	$5x^2$	-3
b)	2	-2	$-2x^2$	7
c)	3	4	$4x^3$	1
d)	3	1	x^3	-1
e)	4	-1	$-x^4$	2
f)	4	2	$2x^4$	0
g)	8	1	x^8	0
h)	1	4	$4x$	-1
i)	4	-1	$-x^4$	0
j)	0	2	2	2
k)	4	-1	$-x^4$	1
l)	6	2	$2x^6$	0
m)	4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}x^4$	4
n)	5	-1	$-x^5$	$-\frac{5}{2}$
o)	3	$2{,}25$	$2{,}25x^3$	$0{,}5$
p)	3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}x^3$	0
r)	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}x^2$	$-\sqrt{2}$
s)	4	$\sqrt[3]{1+\pi}$	$\sqrt[3]{1+\pi}x^4$	$2e$

3. **a)** x^3+x^2+5x+1 **b)** $x^4+2x^3-x^2+4x-2$ **c)** x^3+x+2 **d)** $-3x^4+2x^3+2x^2+5x-1$ **e)** $2x^2+4x-1$ **f)** $2x-5$ **g)** $-3x^3+4x^2+6x-1$ **h)** $6x^7+9x^3+2x^2+2x-4$ **i)** $-x^3+6x^2+2x-4$ **j)** $5x^7$ **k)** $x^4-x^3+x^2-x+1$ **l)** 3 **m)** 0 **n)** x^3+6x^2+4x-2 **o)** $5x^5-2x^4+4x^3+2x-\frac{1}{2}$ **p)** $2x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}$ **r)** $\frac{7}{6}x^3+2x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ **s)** $4x^8+\frac{2}{7}x^6+\frac{26}{3}x^3+x^2-\frac{2}{15}x+4$ **t)** $-\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}x^2+\sqrt{5}x-\sqrt{7}$ **u)** $\sqrt{3}x^5+x^4+x^3+2\sqrt{2}x^2-5\sqrt{3}x+2$

4. **a)** $2x^3-x^2+2x+3$ **b)** $-x^4+2x^3+3x^2-4x-2$ **c)** $2x^3-x-4$ **d)** $-x^4-4x^3+2x^2-5x+1$ **e)** $2x^2+2x+3$ **f)** $6x-1$ **g)** $-7x^3+4x^2-5x-1$ **h)** $3x^7$ **i)** x^3+6x^2+2x-4 **j)** $6x^7-4x^3-2x^2+2x+4$ **k)** $x^4+x^3+x^2+x+1$ **l)** $8x^3$ **m)** $8x^4-4x^2-10x$ **n)** x^3-4x^2+6x-3 **o)** $3x^5+2x^4+4x^3-\frac{5}{2}x^2-x$ **p)** $-2x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{3}{4}$ **r)** $\frac{11}{6}x^3-2x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{6}$ **s)** $3x^{10}+2x^7-\frac{5}{3}x^3-\frac{5}{6}x^2+4x+7$ **t)** $5\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x-\sqrt{7}$ **u)** $\sqrt{3}x^5-x^4+\sqrt{2}x^2+3\sqrt{3}x+7$

5. **a)** $3x^4+3x^3-4x^2+4x+5$ **b)** $x^4+6x^3-4x^2+9x+10$ **c)** $2x^4-3x^3-5x-5$ **d)** x^4+x+2 **e)** $3x^4+6x^3-6x^2+8x+9$ **f)** $-x^4+2x^2+2x+3$ **g)** $6x^3-2x^2+11x+13$ **h)** $2x^4+12x^3-10x^2+15x+15$ **i)** $-3x^4-3x^3+2x^2-7x-10$ **j)** $12x^3-4x^2+22x+26$ **k)** $-2x^2-3x-5$ **l)** $9x^4+6x^3+11x+16$