Roman Brilej, Dezider Ivanec

alfa

Zaporedja
Diferencialni račun

Zbirka nalog za matematiko v
srednjem strokovnem izobraževanju

Ljubljana 2012

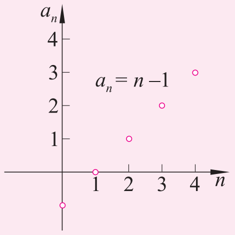
Kazalo

1.1 Definicija in lastnosti zaporedij

Zaporedje je funkcija iz množice naravnih števil v množico realnih števil. Tako definirano zaporedje je **neskončno**.

Funkcijske vrednosti v točkah 1, 2, 3, ..., n, ... označimo z a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... in jih imenujemo **členi** zaporedja. Pri tem je a_1 prvi člen, a_2 drugi člen, ... Člen a_n imenujemo n-ti ali **splošni člen**.

Graf zaporedja je množica točk (n, a_n), kjer n preteče vsa naravna števila. Točke narišemo v pravokotnem koordinatnem sistemu, kjer na abscisni osi označimo n, na ordinatni pa a_n.



Končno zaporedje s k členi je funkcija iz množice $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ v množico realnih števil.

Zaporedje s splošnim členom a_n je:

- **naraščajoče**, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

  $$a_n < a_{n+1}$$

- **padajoče**, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

  $$a_n > a_{n+1}$$

- **monotono**, če je bodisi naraščajoče bodisi padajoče

- **omejeno navzgor**, če obstaja takšno število M (imenujemo ga **zgornja meja** zaporedja), da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

  $$a_n \leq M$$

- **omejeno navzdol**, če obstaja takšno število m (imenujemo ga **spodnja meja** zaporedja), da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

  $$a_n \geq m$$

- **omejeno**, če je omejeno navzdol in navzgor

Zgledi

1. Zapiši prve štiri člene zaporedja $a_n = 3^n - n^2$.
Rešitev: Prvi člen danega zaporedja dobimo tako, da v obrazec za splošni člen vstavimo $n = 1$:

$$a_1 = 3^1 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

Podobno izračunamo preostale tri člene:

$$a_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$
$$a_3 = 3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18$$
$$a_4 = 3^4 - 4^2 = 81 - 16 = 65$$

2. Zapiši prvih pet členov zaporedja, če je $a_1 = -2$ in $a_{n+1} = 2a_n + 3$.
Rešitev: Prvi člen imamo že podan, zato po vrsti izračunajmo še preostale štiri. V obrazec $a_{n+1} = 2a_n + 3$ zapovrstjo vstavljajmo $n = 1, 2, 3, 4$. Tako dobimo:

$$a_{1+1} = 2a_1 + 3 \;\Rightarrow\; a_2 = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$$
$$a_{2+1} = 2a_2 + 3 \;\Rightarrow\; a_3 = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$
$$a_{3+1} = 2a_3 + 3 \;\Rightarrow\; a_4 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$
$$a_{4+1} = 2a_4 + 3 \;\Rightarrow\; a_5 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$$

3. Izračunaj 121. člen zaporedja $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{3}$.
Rešitev: V obrazec za splošni člen zaporedja vstavimo $n = 121$ in se spomnimo periodičnosti kosinusa:

$$\cos(k \cdot 2\pi + x) = \cos x \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned} a_{121} &= \cos \frac{121\pi}{3} = \cos \frac{120\pi + \pi}{3} = \cos\left(40\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \cos\left(20 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Izračunaj 6. člen zaporedja, če je $a_1 = -2$ in $a_{n+1} = 3 - {a_n}^2$.
Rešitev: Tokrat ne bo šlo tako preprosto kot v prejšnjem primeru. Če želimo izračunati 6. člen, moramo v obrazec vstaviti $n = 5$:

$$a_{5+1} = 3 - {a_5}^2 \;\Rightarrow\; a_6 = 3 - {a_5}^2$$

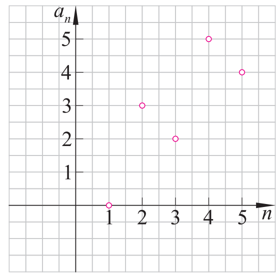
Če torej želimo izračunati 6. člen, moramo poiskati 5. člen. Tega pa lahko izračunamo, če poznamo 4. člen, itd. Tako bo najlažje, da začnemo z izračunom 2. člena in izračunamo vse člene vse do 6. člena:

$$a_2 = 3 - {a_1}^2 = 3 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1$$
$$a_3 = 3 - {a_2}^2 = 3 - (-1)^2 = 3 - 1 = 2$$
$$a_4 = 3 - {a_3}^2 = 3 - 2^2 = 3 - 4 = -1$$
$$a_5 = 3 - {a_4}^2 = 3 - (-1)^2 = 3 - 1 = 2$$
$$a_6 = 3 - {a_5}^2 = 3 - 2^2 = 3 - 4 = -1$$

5. Nariši graf zaporedja $a_n = n + (-1)^n$.
Rešitev: Zaporedje je realna funkcija naravne spremenljivke, zato je njen graf množica točk (n, a_n), ko n preteče vsa naravna števila. Za posamezni n izračunajmo ustrezen a_n:

$$n = 1 \;\Rightarrow\; a_1 = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$$
$$n = 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 2 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$$
$$n = 3 \;\Rightarrow\; a_3 = 3 + (-1)^3 = 3 - 1 = 2$$
$$n = 4 \;\Rightarrow\; a_4 = 4 + (-1)^4 = 4 + 1 = 5$$
$$n = 5 \;\Rightarrow\; a_5 = 5 + (-1)^5 = 5 - 1 = 4$$

Točke (n, a_n) narišemo v koordinatni sistem. Na abscisni osi označimo n, na ordinatni pa a_n. Mi bomo narisali zgolj 5 točk, v resnici pa jih je seveda neskončno.



6. Poišči najpreprostejši predpis za splošni člen zaporedja, ki mu zadoščajo začetni členi: $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{32}, \ldots$

Rešitev: Tovrstne naloge nimajo pravega recepta, s katerim bi jih rešili. Pomagajo nam izkušnje, ki smo si jih pridobili z reševanjem nalog iz področja števil. Tako lahko v števcih ulomkov prepoznamo zaporedna liha števila. Že v 1. letniku smo spoznali, da jih lahko zapišemo v obliki $2n-1$ oziroma $2n+1$. Ker pričnemo zaporedja števil z $n = 1$, vidimo, da je ustrezni zapis $2n+1$, saj je za $n = 1$ števec prvega ulomka enak:

$$2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Naslednji pa je:

$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Sedaj moramo še ugotoviti, kaj se skriva v imenovalcih ulomkov. Tudi to pot nam pomagajo izkušnje. V teh številih prepoznamo zaporedne potence števila 2:

$$2 = 2^1 \qquad 4 = 2^2 \qquad 8 = 2^3 \qquad 16 = 2^4 \qquad 32 = 2^5$$

Torej je imenovalec splošnega člena za poljuben n enak 2^n. Tako lahko splošni člen zaporedja, ki mu zadoščajo vsi dani členi, zapišemo kot:

$$a_n = \frac{2n+1}{2^n}$$

7. Kateri člen zaporedja $a_n = \frac{5n+1}{n+2}$ je enak 4?

Rešitev: Rešiti moramo enačbo $a_n = 4$:

$$\begin{aligned} \frac{5n+1}{n+2} &= 4 \quad / \cdot (n+2) \\ 5n+1 &= 4(n+2) \\ 5n+1 &= 4n+8 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Tako lahko ugotovimo, da je 7. člen zaporedja enak 4.

8. Pokaži, da je zaporedje $a_n = 2n^2 + 3n$ naraščajoče.

Rešitev: Zaporedje a_n je naraščajoče, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$\boxed{a_{n+1} > a_n}$$

Pokažimo, da naše zaporedje zadošča temu pogoju. Najprej določimo:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2(n+1)^2+3(n+1)=2(n^2+2n+1)+3n+3= \\ &= 2n^2+4n+2+3n+3=2n^2+7n+5 \end{aligned}$$

Zapišimo neenačno $a_{n+1} > a_n$ in pokažimo, da jo reši vsako naravno število n:

$$\begin{aligned} 2n^2+7n+5 &> 2n^2+3n \\ 4n &> -5 \quad /:4 \\ n &> -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Očitno zgornja trditev drži za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj so naravna števila pozitivna. Zato za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} > a_n$, kar pomeni, da je naše zaporedje naraščajoče.

9. Pokaži, da je zaporedje $a_n = (\sqrt{5}-2)^n$ padajoče.
Rešitev: Nalogo bi lahko rešili podobno kot prejšnjo, vendar se bomo tokrat raje sklicevali na lastnost eksponentne funkcije:

$$f(x) = (\sqrt{5}-2)^x$$

Kot vemo, je eksponentna funkcija $f(x) = a^x$ padajoča, če je $0 < a < 1$. V našem primeru je osnova funkcije f enaka:

$$\sqrt{5}-2 \doteq 0^{\cdot}24$$

Torej je funkcija $f(x) = (\sqrt{5}-2)^x$ padajoča. To pomeni, da je za vsak $y > x$ izpolnjena neenakost:

$$f(y) < f(x)$$

oziroma:

$$(\sqrt{5}-2)^y < (\sqrt{5}-2)^x$$

Ker pa je $n+1 > n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je

$$(\sqrt{5}-2)^{n+1} < (\sqrt{5}-2)^n$$

Torej je naše zaporedje padajoče.

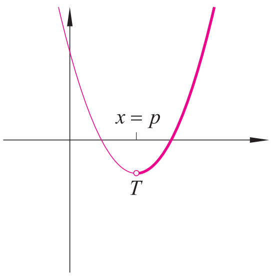
10. Ugotovi, ali je zaporedje $a_n = n^2 - 10n + 20$ monotono.
Rešitev: Zaporedje je monotono, če je bodisi padajoče bodisi naraščajoče. Poglejmo, če lahko naše zaporedje uvrstimo v katero od teh dveh kategorij. Za občutek najprej izračunajmo nekaj začetnih členov:

$a_1 = 1^2 - 10 \cdot 1 + 20 = 11$
$a_2 = 2^2 - 10 \cdot 2 + 20 = 4$
$a_3 = 3^2 - 10 \cdot 3 + 20 = -1$

Vidimo, da vrednosti členov na začetku padajo. Zato bi morda predvidevali, da je dano zaporedje padajoče. To bi morali seveda še dokazati. Namesto tega pa raje poglejmo, kakšna funkcija je naše zaporedje. Vidimo, da je kvadratna funkcija spremenljivke n, in sicer s pozitivnim vodilnim koeficientom. Opazujmo funkcijo:

$$f(x) = x^2 - 10x + 20$$

Vemo, da je njen graf odprt navzgor, saj je vodilni koeficient pozitiven. To pomeni, da desno od abscise temena funkcija f narašča. Torej bo tudi zaporedje začelo od nekje naprej naraščati.



Povzemimo naša dognanja. Na začetku zaporedje pada, nato pa začne od nekod naprej naraščati. To pomeni, da to zaporedje ni niti padajoče niti naraščajoče, torej ni monotono.

11. Pokaži, da je $m = 2$ spodnja meja zaporedja $a_n = \log_3 10^n$.
Rešitev: Da je m spodnja meja zaporedja a_n, pomeni, da noben člen zaporedja ni manjši od m. Torej je za vsak $n \in \mathbb{N}$ izpolnjena enakost:

$$\boxed{a_n \geq m}$$

Pokažimo torej, da so vsi členi našega zaporedja večji ali enaki 2. Najprej uporabimo obrazec za logaritem potence:

$$\boxed{\log_a x^y = y \log_a x}$$

Tako lahko pišemo:

$$a_n = \log_3 10^n = n \log_3 10$$

Nadalje se spomnimo, da je logaritemska funkcija z osnovo, ki je večja od 1, naraščajoča. Tako za $x > y$ velja:

$$\log_3 x > \log_3 y$$

V našem primeru je:

$$\log_3 10 > \log_3 9$$

Tako imamo:

$$a_n = n \log_3 10 > n \log_3 9 = n \log_3 3^2 = n \cdot 2 = 2n$$

Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ je očitno:

$$2n \geq 2$$

Tako velja za vsak $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n > 2$$

Torej je $m = 2$ res spodnja meja danega zaporedja.

12. Pokaži, da je zaporedje $a_n = \cos 2^n$ navzdol omejeno.
Rešitev: Zaporedje a_n je navzdol omejeno, če obstaja takšno število m, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$a_n \geq m$$

Kot vemo, to število imenujemo spodnja meja zaporedja.
V našem primeru ne bo težko poiskati kakšne spodnje meje zaporedja, saj vemo, da je vrednost funkcije kosinus vselej med -1 in 1:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Tako za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$a_n = \cos 2^n \geq -1$$

Torej je število $m = -1$ spodnja meja danega zaporedja in je zato le-to navzdol omejeno. Pripomnimo še, da je vsako število, ki ja manjše od -1, tudi spodnja meja danega zaporedja.

13. Pokaži, da je $M = 1$ zgornja meja zaporedja $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$.
Rešitev: Število M je zgornja meja zaporedja a_n, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$\boxed{a_n \leq M}$$

Pokažimo, da v našem primeru $M = 1$ zadošča gornji neenakosti:

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1 \\ \frac{2n+1}{3n+2} &\leq 1 \end{aligned}$$

To neenakost smemo pomnožiti s $3n+2$, saj je za vsak $n \in \mathbb{N}$ ta izraz pozitiven:

$$\begin{aligned} 2n+1 &\leq 3n+2 \\ -n &\leq 1 \quad / \cdot (-1) \\ n &\geq -1 \end{aligned}$$

Seveda je vsak $n \in \mathbb{N}$ večji od -1, zato gornja neenakost velja, torej tudi začetna, kar pomeni, da je $M = 1$ res zgornja meja našega zaporedja.

Naloge

1. Zapiši prve štiri člene zaporedja:

a) $a_n = 4n + 2$ **b)** $a_n = 1 - n^2$ **c)** $a_n = -2$
d) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ **e)** $a_n = (-1)^n$ **f)** $a_n = 2^n - 1$
g) $a_n = n\sqrt{n+1}$ **h)** $a_n = \log_2 n$ **i)** $a_n = \sin n\pi$

2. Zapiši prvih šest členov zaporedja:

a) $a_n = n + (-1)^n n$ **b)** $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$ **c)** $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{3}$
d) $a_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ **e)** $a_n = \dfrac{1}{n}\cos n\pi$ **f)** $a_n = \cos\left(\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}\right)$

3. Zapiši prvih pet členov zaporedja, če je:

a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3$ **b)** $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -2a_n$
c) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n - \dfrac{1}{2}$ **d)** $a_1 = -2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$
e) $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ **f)** $a_1 = 3,\ a_2 = -1,\ a_{n+2} = a_n a_{n+1}$

4. Izračunaj iskani člen zaporedja:

a) $a_n = 3n + 4$, $a_7 = ?$

b) $a_n = \dfrac{n+4}{2n-1}$, $a_{14} = ?$

c) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+7}$, $a_9 = ?$

d) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$, $a_4 = ?$

e) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{6}$, $a_{117} = ?$

f) $a_n = \tan\dfrac{n\pi}{3}$, $a_{700} = ?$

5. Izračunaj 8. člen zaporedja, če je:

a) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n - 5$

b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 1 - \dfrac{3}{2}a_n$

6. Nariši graf zaporedja:

a) $a_n = n + 1$

b) $a_n = \dfrac{9-3n}{2}$

c) $a_n = 2 + 2^{3-n}$

d) $a_n = \dfrac{n-1}{2n-5}$

e) $a_n = n - (-1)^n$

f) $a_n = (-1)^n(1-n)$

7. Poišči najpreprostejši predpis za splošni člen, ki mu zadoščajo začetni členi zaporedja:

a) $5, 6, 7, 8, 9 \ldots$

b) $-4, -2, 0, 2, 4 \ldots$

c) $3, 6, 9, 12, 15 \ldots$

d) $10, 6, 2, -2, -6 \ldots$

e) $1, 4, 9, 16, 25 \ldots$

f) $0, 1, 8, 27, 64 \ldots$

g) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6} \ldots$

h) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{7}{16}, \dfrac{9}{20} \ldots$

i) $1, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{11}{15} \ldots$

j) $2, 1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5} \ldots$

k) $2, 4, 8, 16, 32 \ldots$

l) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{8}{5}, \dfrac{8}{3} \ldots$

8. Kateri člen danega zaporedja je enak 2:

a) $a_n = 4n - 26$

b) $a_n = \dfrac{13-n}{n+2}$

c) $a_n = \dfrac{4n+5}{n+3}$

d) $a_n = n^2 - 4n - 3$

e) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n+2}$

f) $a_n = 2^{n+1} - 5 \cdot 2^{n-2} - 46$

g) $a_n = 9^n - 28 \cdot 3^{n+1} + 245$

h) $a_n = \log_n 9 - 1$

i) $a_n = 2\sin\dfrac{n\pi}{4}$

j) $a_n = 1 + 2\cos\dfrac{n\pi}{4}$

9. Pokaži, da je dano zaporedje naraščajoče:

a) $a_n = 4n - 5$

b) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

c) $a_n = n^2 + n$

d) $a_n = (\sqrt{2})^n$

e) $a_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$

f) $a_n = \dfrac{3^n}{n+3}$

10. Pokaži, da je dano zaporedje padajoče:

a) $a_n = 2 - 3n$

b) $a_n = \dfrac{2n+4}{3n+5}$

c) $a_n = \dfrac{2-n^2}{n+1}$

d) $a_n = (\pi - 3)^n$

11. Ugotovi, ali je dano zaporedje monotono:

a) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

b) $a_n = \dfrac{n}{2n-7}$

c) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n-1}$

d) $a_n = -4 \cdot (-3)^n$

e) $a_n = \sqrt{n^2+1}$

f) $a_n = 2^{-n} + 2^n$

12. Pokaži, da je $m = 1$ spodnja meja zaporedja:

a) $a_n = 2n - 1$ **b)** $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ **c)** $a_n = n^2 + 2n - 2$

d) $a_n = 3 + \sin\dfrac{n\pi}{7}$ **e)** $a_n = \log_2 3^n$ **∗f)** $a_n = \dfrac{3^n}{n + 2^n}$

13. Pokaži, da je dano zaporedje navzdol omejeno:

a) $a_n = n^3 - 7$ **b)** $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$ **c)** $a_n = \dfrac{3n+5}{2-4n}$

d) $a_n = \sin n^2$ **e)** $a_n = -2^{\cos\frac{n\pi}{3}}$ **∗f)** $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}\log(1+2^n)$

14. Pokaži, da je M zgornja meja danega zaporedja:

a) $a_n = 1 - 2n,\ M = 1$ **b)** $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3},\ M = \dfrac{5}{6}$

c) $a_n = 20n - n^2,\ M = 100$ **d)** $a_n = \dfrac{5n-1}{n^2+7},\ M = 1$

15. Pokaži, da je dano zaporedje navzgor omejeno:

a) $a_n = \dfrac{3n-2}{4n+1}$ **b)** $a_n = \dfrac{n^2-1}{2-3n}$

c) $a_n = \dfrac{-n^2+12n-13}{n+6}$ **d)** $a_n = n \cdot 2^{-n}$

e) $a_n = \dfrac{1}{\pi - n}$

16. Ali je dano zaporedje navzdol oziroma navzgor omejeno:

a) $a_n = 3 - 5n$ **b)** $a_n = \dfrac{1-2n}{n+1}$ **c)** $a_n = \dfrac{n^2-30}{2n-1}$

d) $a_n = |10n - n^2|$ **e)** $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{17} - n}$ **f)** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

g) $a_n = (-1)^n(n+4)$ **h)** $a_n = (-\sqrt{2})^n$ **∗i)** $a_n = \sqrt[n]{n}$

∗j) $a_n = n\sin\dfrac{n\pi}{7}$ **∗k)** $a_n = \dfrac{2^n}{2^n - 3^n}$ **∗l)** $a_n = 2^{-\frac{1}{|\sin n|}}$

17. Razišči monotonost in omejenost zaporedja:

a) $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ **b)** $a_n = \dfrac{(-2)^n}{3+2^n}$ **c)** $a_n = 10n - n^2$

d) $a_n = 2^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$ **e)** $a_n = n\sin\dfrac{n\pi}{2}$ **∗f)** $a_n = n + \sin n$

Rešitve

1. **a)** 6, 10, 14, 18 **b)** 0, −3, −8, −15 **c)** −2, −2, −2, −2 **d)** $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}$
e) −1, 1, −1, 1 **f)** 1, 3, 7, 15 **g)** $\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 6, 4\sqrt{5}$ **h)** $0, 1, \log_2 3, 2$
i) 0, 0, 0, 0

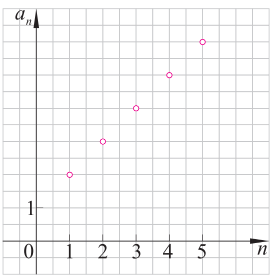
2. **a)** 0, 4, 0, 8, 0, 12 **b)** 0, −1, 0, 1, 0, −1 **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$
d) −1, 1, −1, 1, −1, 1 **e)** $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ **f)** 0, 0, 0, 0, 0, 0

3. **a)** 2, 5, 8, 11, 14 **b)** −1, 2, −4, 8, −16 **c)** $3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{11}{18}, -\frac{19}{27}$
d) $-2, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ **e)** 1, 4, 5, 9, 14 **f)** 3, −1, −3, 3, −9

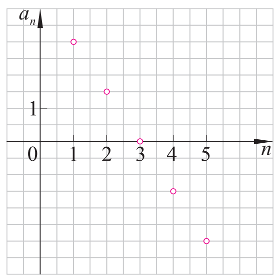
4. **a)** $a_7 = 25$ **b)** $a_{14} = \frac{2}{3}$ **c)** $a_9 = -1$ **d)** $a_4 = 2$ **e)** $a_{117} = -1$ **f)** $a_{700} = \sqrt{3}$

5. **a)** $a_8 = -123$ **b)** $a_8 = -\frac{431}{16}$

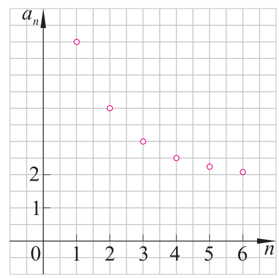
6. **a)**



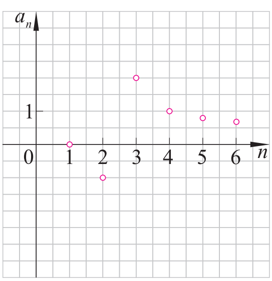
b)



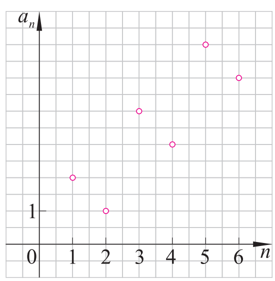
c)



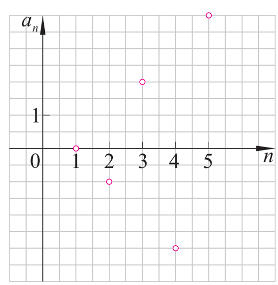
d)



e)



f)



7. **a)** $a_n = n + 4$ **b)** $a_n = 2n - 6$ **c)** $a_n = 3n$ **d)** $a_n = 14 - 4n$ **e)** $a_n = n^2$
f) $a_n = (n-1)^3$ **g)** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **h)** $a_n = \frac{2n-1}{4n}$ **i)** $a_n = \frac{2n+1}{3n}$ **j)** $a_n = \frac{2}{n}$
k) $a_n = 2^n$ **l)** $a_n = \frac{2^{n-1}}{n+1}$

8. **a)** a_7 **b)** a_3 **c)** Noben. **d)** a_5 **e)** Noben. **f)** a_6 **g)** a_1 in a_4 **h)** Noben.
i) a_i, $i = 2 + 8k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ **j)** Noben.

9. Namig: pokaži, da velja $a_{n+1} > a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

10. Namig: pokaži, da velja $a_{n+1} < a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

11. **a)** Da (naraščajoče). **b)** Ne. **c)** Da (padajoče). **d)** Ne.
e) Da (naraščajoče). **f)** Da (naraščajoče).