Roman Brilej

alfa

Potenčna in kvadratna funkcija

Zbirka nalog za matematiko v srednjem strokovnem izobraževanju

Ljubljana 2014

Kazalo

1.1 Potenčna funkcija z naravnim eksponentom

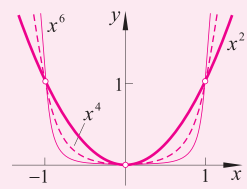
Potenčna funkcija z naravnim eksponentom je realna funkcija oblike:

$$f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Definicijsko območje te funkcije so vsa realna števila. Večina lastnosti je odvisna od parnosti (lihosti, sodosti) eksponenta.

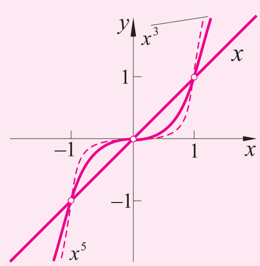
Potenčna funkcija s sodim naravnim eksponentom

- je soda funkcija; njen graf je simetričen glede na ordinatno os
- zaloga vrednosti je množica nenegativnih realnih števil: $Z_f = [0, \infty)$
- pri poljubnem eksponentu poteka graf skozi točke $(0, 0)$, $(-1, 1)$ in $(1, 1)$
- na intervalu $(-\infty, 0]$ pada, na $[0, \infty)$ pa narašča
- je navzdol omejena
- povsod, razen v $x = 0$, je pozitivna



Potenčna funkcija z lihim naravnim eksponentom

- je liha funkcija; njen graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče
- zaloga vrednosti je množica vseh realnih števil: $Z_f = \mathbb{R}$
- pri poljubnem eksponentu poteka graf skozi točke $(0, 0)$, $(-1, -1)$ in $(1, 1)$
- je naraščajoča
- je bijektivna
- na intervalu $(-\infty, 0)$ je negativna, na intervalu $(0, \infty)$ pa pozitivna



Zgledi

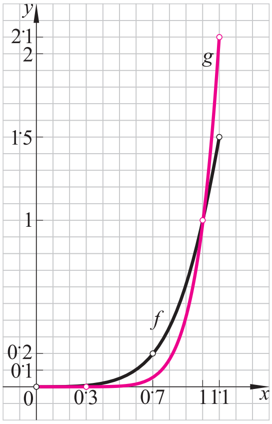
1. V isti koordinatni sistem nariši grafa funkcij $f(x) = x^4$ in $g(x) = x^8$ na intervalu $[0, 1{\cdot}1]$.
Rešitev: Graf potenčne funkcije navadno rišemo zgolj s tremi značilnimi točkami. Ker imamo tokrat opraviti z majhnim intervalom, bomo kakšno točko še dodali.

Izberimo nekaj vrednosti za x in izračunajmo vrednosti danih funkcij. Med izbranimi vrednostmi spremenljivke x morata biti meji danega intervala, torej 0 in 1˙1 ter seveda $x = 1$. Nato izberimo še dve vrednosti, denimo $x = 0˙3$ in $x = 0˙7$. Pomagajmo si z računalom in funkcijske vrednosti zaokrožimo na eno decimalno mesto, saj večje natančnosti ne moremo upoštevati pri risanju. Vse vrednosti prikažimo v tabeli.

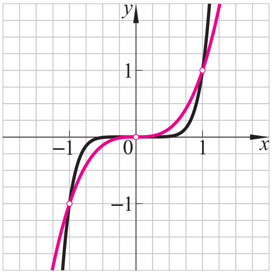
x	x^4	x^8
0	0	0
0˙3	0˙0	0˙0
0˙7	0˙2	0˙1
1	1	1
1˙1	1˙5	2˙1

Narišimo ustrezne točke v koordinatni sistem in skozi njih še grafa danih funkcij. Pripomnimo, da vrednosti f in g v točki $x = 0˙3$ nista natančno 0, saj vemo, da obe funkciji za $x > 0$ naraščata, vendar sta vrednosti tako majhni, da sta, zaokroženi na eno decimalno mesto, enaki 0. Torej sta grafa funkcij f in g na intervalu $[0, 0˙3]$ 'prilepljena' na os x.

Vidimo, da leži graf funkcije $f(x) = x^4$ na intervalu $(0, 1)$ nad grafom funkcije $g(x) = x^8$, za $x > 1$ pa pod njim.



2. Na sliki sta grafa funkcij $f(x) = x^3$ in $g(x) = x^7$. Ugotovi, kateri je graf funkcije f in kateri graf funkcije g.



Rešitev: Opazujmo grafa na intervalu $(0, 1)$. Vemo, da tam leži graf potenčne funkcije z večjim eksponentom pod grafom potenčne funkcije z manjšim eksponentom. Torej je graf funkcije $f(x) = x^3$ rdeč, graf funkcije $g(x) = x^7$ pa črn.

3. Katera izmed točk $A(-1, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 0)$, $D(1, 1)$, $E(1, -1)$ leži na grafu funkcije $f(x) = x^7$?

Rešitev: Dane točke imajo abscise $-1, 0$ in 1. V teh točkah je:

$$f(-1) = (-1)^7 = -1$$

$$f(0) = 0^7 = 0$$

$$f(1) = 1^7 = 1$$

Torej ležijo na grafu funkcije f točke $(-1, -1)$, $(0, 0)$, in $(1, 1)$, to pa so točke A, C in D.

4. Dani sta funkciji $f(x) = x^3$ in $g(x) = x^4$. Kaj je več, $f(1{\cdot}2)$ ali $g(1{\cdot}2)$?
Rešitev: Vrednost potenčne funkcije z naravnim eksponentom je za vsak $x > 1$ tem večja, čim večji je eksponent. Tako je v našem primeru:

$$1{\cdot}2^4 > 1{\cdot}2^3$$

Torej je:

$$g(1{\cdot}2) > f(1{\cdot}2)$$

5. Dani sta funkciji $f(x) = x^5$ in $g(x) = x^6$. Kaj je več, $f(0{\cdot}5)$ ali $g(0{\cdot}5)$?
Rešitev: Tokrat imamo opraviti s številom, ki leži na intervalu $(0, 1)$. Tam je vrednost potenćne funkcije tem manjša, čim večji je eksponent. V našem primeru je tako:

$$0{\cdot}5^6 < 0{\cdot}5^5$$

oziroma:

$$g(0{\cdot}5) < f(0{\cdot}5)$$

6. Za funkcijo $f(x) = x^5$ brez uporabe računala ugotovi, kaj je več, $f(-\sqrt{3})$ ali $f(-\sqrt{2})$.
Rešitev: Potenčna funkcija z lihim naravnim eksponentom je na celotni realni osi naraščujoča. Če je torej $a < b$, je:

$$f(a) < f(b)$$

V našem primeru je:

$$-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$$

Zato je:

$$f(-\sqrt{3}) < f(-\sqrt{2})$$

7. Brez računala uredi po velikosti vrednosti funkcij $f(x) = x^3$, $g(x) = x^6$, $h(x) = x^8$ in $s(x) = x^9$ v točki $x = -0{\cdot}3$.
Rešitev: Pri negativni vrednosti spremenljivke x je vrednost potenčne funkcije z lihim naravnim eksponentom negativna, s sodim naravnim eksponatom pa pozitivna. Zato lahko ločeno primerjamo funkciji $f(x) = x^3$ in $s(x) = x^9$ ter $g(x) = x^6$ in $h(x) = x^8$.

Na intervalu $(-1, 0)$, na katerem leži tudi število $-0{\cdot}3$, je graf potenčne funkcije tem bližji abscisni osi, čim večji je eksponent. Tako sta grafa funkcij $s(x) = x^9$ in $h(x) = x^8$ bliže abscisni osi, kar pomeni:

$$s(-0{\cdot}3) > f(-0{\cdot}3) \qquad \text{in} \qquad h(-0{\cdot}3) < g(-0{\cdot}3)$$

Tako lahko zapišemo:

$$f(-0{\cdot}3) < s(-0{\cdot}3) < 0 < h(-0{\cdot}3) < g(-0{\cdot}3)$$

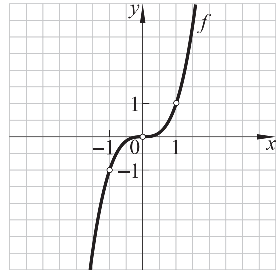
Zgornji zapis pa je seveda rešitev naloge, saj nas število 0 v neenakostih ne moti.

8. V isti koordinatni sistem nariši grafa funkcij $f(x) = x^3$ in $g(x) = -x^3 + 1$.

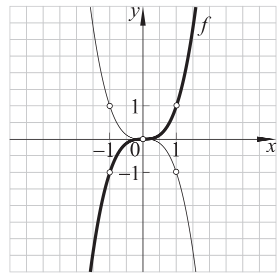
Rešitev: Najprej narišimo graf funkcije $f(x) = x^3$. Kot vemo, le-ta poteka skozi točke:

$$(-1, -1), \quad (0, 0) \quad \text{in} \quad (1, 1)$$

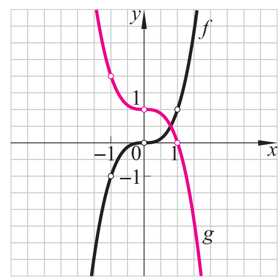
Graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.



Graf funkcije $g(x) = -x^3 + 1$ narišimo postopoma. Najprej narišimo krivuljo $y = -x^3$. Dobimo jo tako, da graf funkcije $f(x) = x^3$ zrcalimo čez abscisno os.



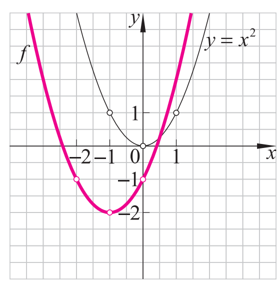
Krivuljo $y = -x^3$ še vzporedno premaknimo za 1 navzgor in dobili smo graf funkcije $g(x) = -x^3 + 1$.



9. Nariši graf funkcije $f(x) = (x + 1)^2 - 2$ in določi njeno zalogo vrednosti.

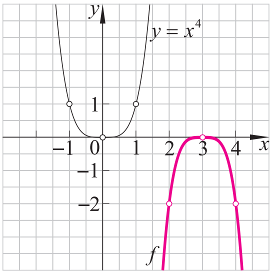
Rešitev: Graf dane funkcije narišemo tako, da krivuljo $y = x^2$ premaknemo za 1 v levo in za 2 navzdol. Zalogo vrednosti funkcije f sestavljajo vse vrednosti $f(x)$ funkcije f, ko x preteče vsa realna števila. To pa so ravno ordinate točk grafa funkcije f. Iz grafa je razvidno, da imajo točke grafa ordinate $y \geq -2$ in je tako:

$$Z_f = [-2, \infty)$$



10. Nariši graf funkcije $f(x) = -2(x-3)^4$ in ugotovi, ali je funkcija soda oziroma liha.

Rešitev: Krivuljo $y = x^4$ moramo premakniti za 3 v desno in raztegniti v smeri osi y za faktor -2. Ker je ta faktor negativen, pomeni, da bomo graf zrcalili čez abscisno os in raztegnili s faktorjem 2. Tako bodo značilne točke $(-1,1)$, $(0,0)$ in $(1,1)$ prešle v točke:



$(-1+3, -2\cdot 1) = (2,-2)$

$(0+3, -2\cdot 0) = (3,0)$

$(1+3, -2\cdot 1) = (4,-2)$

Graf funkcije f ni simetričen glede na ordinatno os, zato funkcija f ni soda. Ker graf ni simetričen glede na koordinatno izhodišče, funkcija ni liha.

11. Nariši graf funkcije $f(x) = \dfrac{3}{2}(2-x)^5$ in določi območje naraščanja oziroma padanja.

Rešitev: Zapisano funkcijo najprej preoblikujmo tako, da se znebimo minusa pred x-om:

$$f(x) = \frac{3}{2}(2-x)^5 + 3 = \frac{3}{2}(-(x-2))^5 + 3 = -\frac{3}{2}(x-2)^5 + 3$$

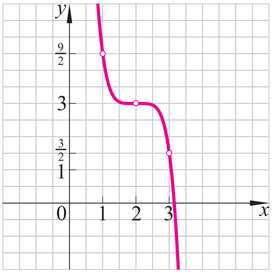
Sedaj iz zapisa preberimo potrebne transformacije, ki jih moramo izvršiti na krivulji $y = x^5$, da dobimo graf dane funkcije:

razteg za $-\dfrac{3}{2}$ v smeri osi y

premik za 2 v desno

premik za 3 navzgor

Tako značilne točke $(-1,-1)$, $(0,0)$ in $(1,1)$ krivulje $y = x^5$ preidejo v:



$(-1+2, -\frac{3}{2}\cdot(-1)+3) = (1, \frac{9}{2})$

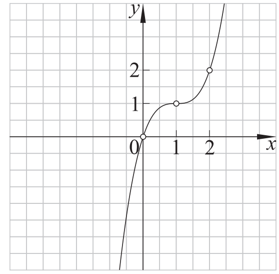
$(0+2, -\frac{3}{2}\cdot 0+3) = (2,3)$

$(1+2, -\frac{3}{2}\cdot 1+3) = (3, \frac{3}{2})$

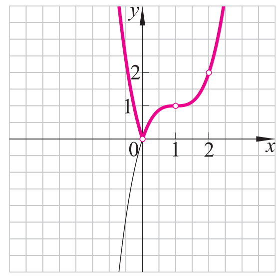
Določimo še območja naraščanja oziroma padanja. S slike preberemo, da povsod z naraščanjem x-a ordinate točk grafa padajo. Zato je funkcija f na celotni realni osi padajoča.

12. Nariši graf funkcije $f(x) = |(x-1)^3 + 1|$.

Rešitev: Narišimo krivuljo $y = (x-1)^3 + 1$. Dobimo jo tako, da krivuljo $y = x^3$ premaknemo za 1 v desno in za 1 navzgor.



Sedaj tisti del krivulje, ki leži pod abscisno osjo, prezrcalimo čez to os in naloga je končana.



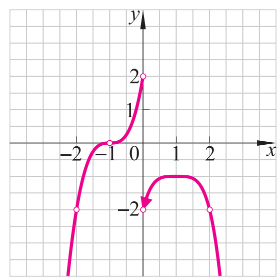
13. Nariši graf funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+1)^3; & x \leq 0 \\ -(x-1)^4 - 1; & x > 0 \end{cases}$$

Ugotovi, ali je funkcija f navzgor oziroma navzdol omejena.

Rešitev: Najprej narišimo graf funkcije f za $x \leq 0$. To je del krivulje $y = 2(x+1)^3$, ki jo dobimo tako, da krivuljo $y = x^3$ raztegenemo v smeri osi y za faktor 2 in ga premaknemo za 1 v levo.

Nato za $x > 0$ narišimo krivuljo $y = -(x-1)^4 - 1$. Dobimo jo z zrcaljenjem krivulje $y = x^4$ čez abscisno os in premikom za 1 v desno in 1 navzdol.



S slike preberemo, da funkcija zavzame poljubne negativne vrednosti in pozitivne vrednosti, ki so manjše ali enake 2. Zato funkcija ni navzdol omejena, navzgor pa je omejena z $M = 2$.

14. Določi vse x, za katere je vrednost funkcije $f(x) = \dfrac{5}{3}(x-2)^4 - 7$ enaka 128.

Rešitev: Iščemo vse tiste x, ki zadoščajo enačbi:

$$f(x) = 128$$

Zapišimo to enačbo za dano funkcijo in jo rešimo:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}(x-2)^4 - 7 &= 128 \\ \frac{5}{3}(x-2)^4 &= 135 \quad / \cdot \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(x-2)^4 &= 81 \\
x-2 &= \pm\sqrt[4]{81} \\
x &= 2\pm\sqrt[4]{3^4} = 2\pm 3
\end{aligned}
$$

Od tod dobimo rešitvi:

$$x_1 = 2+3 = 5 \qquad \text{in} \qquad x_2 = 2-3 = 1$$

15. Določi presečišče premice $y = 5$ in grafa funkcije $f(x) = 2(x+1)^3 - 427$.
Rešitev: Abscisa presečišča zadošča enačbi:

$$f(x) = 5$$

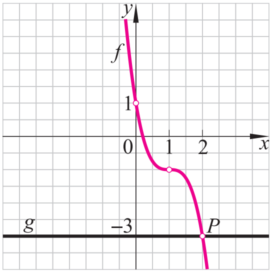
Zapišimo enačbo in jo rešimo:

$$
\begin{aligned}
2(x+1)^3 - 427 &= 5 \\
2(x+1)^3 &= 432 \quad / : 2 \\
(x+1)^3 &= 216 \\
x+1 &= \sqrt[3]{216} \\
x &= \sqrt[3]{6^3} - 1 \\
x &= 6-1 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Presečišče je točka $P(5,5)$.

16. Nariši grafa funkcij $f(x) = -2(x-1)^3 - 1$ in $g(x) = -3$ ter določi njuno presečišče.

Rešitev: Graf funkcije f dobimo tako, da krivuljo $y = x^3$ raztegnemo za faktor -2 v smeri osi y in jo premaknemo za 1 v desno in za 1 navzdol. Graf funkcije g je premica, vzporedna z osjo y.



S slike lahko preberemo, da se grafa sekata v točki $P(2,-3)$. Velja pa to še računsko preveriti. Da točka P leži na grafu funkcije g, je očitno, saj ima ordinato enako -3. Poglejmo, ali res leži na grafu funkcije f. Izračunajmo vrednost funkcije f v abscisi točke P:

$$f(2) = -2(2-1)^3 - 1 = -2\cdot 1^3 - 1 = -2-1 = -3$$

Vidimo, da je $f(2)$ enak ordinati točke P, torej je točka P res presečišče obeh grafov.

17. Določi ničle funkcije $f(x) = -\dfrac{3}{2}(x+3)^6 + 6$.
Rešitev: Rešiti moramo enačbo $f(x) = 0$:

$$-\frac{3}{2}(x+3)^6 + 6 = 0$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{2}(x+3)^6 &= -6 \quad / \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\
(x+3)^6 &= 4 \\
x+3 &= \pm\sqrt[6]{4} \\
x &= -3 \pm \sqrt[6]{2^2} \\
x &= -3 \pm \sqrt[3]{2}
\end{aligned}
$$

Ničli funkcije f sta $x_1 = -3 + \sqrt[3]{2}$ in $x_2 = -3 - \sqrt[3]{2}$.

18. Določi tak a, da bo točka $A(-3, 25)$ ležala na grafu funkcije $f(x) = a(x+1)^4 - 7$.
Rešitev: Če naj točka A leži na grafu funkcije f, mora veljati:

$$f(-3) = 25$$

Zapišimo ustrezno enačbo in jo rešimo:

$$
\begin{aligned}
a(-3+1)^4 - 7 &= 25 \\
a(-2)^4 &= 32 \\
16a &= 32 \quad / : 16 \\
a &= 2
\end{aligned}
$$

19. Določi taki števili a in b, da bosta točki $A(-3, -17)$ in $B(0, 115)$ ležali na grafu funkcije $f(x) = a(x+2)^5 + b$.
Rešitev: Točki A in B bosta ležali na grafu funkcije f, če bo veljalo:

$$f(-3) = -17 \qquad \text{in} \qquad f(0) = 115$$

Tako dobimo enačbi z neznankama a in b:

$$
\begin{aligned}
a(-3+2)^5 + b &= -17 \\
a(0+2)^5 + b &= 115
\end{aligned}
$$

V enačbah izračunamo potenci in imamo:

$$
\begin{aligned}
-a + b &= -17 \\
32a + b &= 115
\end{aligned}
$$

Dobili smo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama. Rešimo ga.
Od druge enačbe odštejmo prvo in se znebimo neznanke b:

$$
\begin{aligned}
32a - (-a) &= 115 - (-17) \\
33a &= 132 \quad / : 33 \\
a &= 4
\end{aligned}
$$

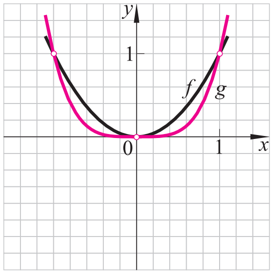
Poiščimo še b. Vrednost $a = 4$ vstavimo v eno izmed enačb z dvema neznankama:

$$
\begin{aligned}
-a + b &= -17 \\
-4 + b &= -17 \\
b &= -13
\end{aligned}
$$

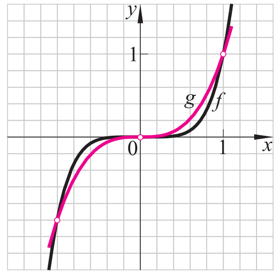
Iskani števili sta $a = 4$ in $b = -13$.

Rešitve

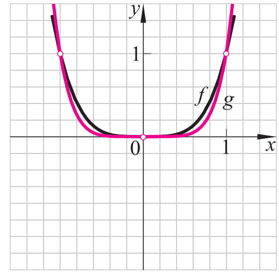
1. **a)**



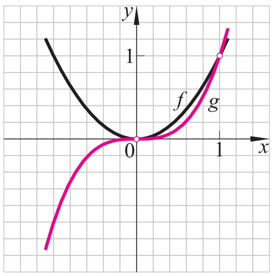
b)



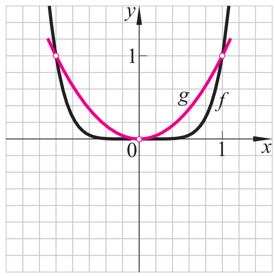
c)



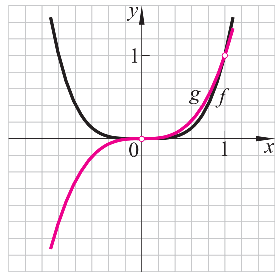
d)



e)



f)



2. **a)** $f(x) = x^2,\ g(x) = x^4$ **b)** $f(x) = x^5,\ g(x) = x^3$ **c)** $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$
d) $f(x) = x^2,\ g(x) = x^6$ **e)** $f(x) = x^4,\ g(x) = x^3$ **f)** $f(x) = x^6,\ g(x) = x^4$

3. **a)** A, C, D **b)** B, C, D **c)** A, C, D **d)** B, C, D

4. **a)** $f(0{\cdot}2)$ **b)** $f(-0{\cdot}7)$ **c)** $g\left(\frac{6}{5}\right)$ **d)** $g(-3{\cdot}1)$ **e)** $g\left(\frac{11}{10}\right)$ **f)** $f\left(-\frac{3}{7}\right)$

5. **a)** $f(1{\cdot}5)$ **b)** $f(0{\cdot}4)$ **c)** $f(-1{\cdot}6)$ **d)** $f(-3)$ **e)** $f(-14)$ **f)** $f(-5{\cdot}8)$

6. **a)** $f(1{\cdot}3) < g(1{\cdot}3) < h(1{\cdot}3) < s(1{\cdot}3)$
b) $h(-2{\cdot}1) < g(-2{\cdot}1) < f(-2{\cdot}1) < s(-2{\cdot}1)$ **c)** $f(8) < g(8) < h(8) < s(8)$
d) $f(1) = g(1) = h(1) = s(1)$ **e)** $g\left(-\frac{4}{5}\right) < h\left(-\frac{4}{5}\right) < s\left(-\frac{4}{5}\right) < f\left(-\frac{4}{5}\right)$
f) $g(-1) = h(-1) < f(-1) = s(-1)$ **g)** $f\left(\frac{8}{3}\right) < g\left(\frac{8}{3}\right) < h\left(\frac{8}{3}\right) < s\left(\frac{8}{3}\right)$
h) $h(-12) < g(-12) < f(-12) < s(-12)$ **i)** $s\left(\frac{1}{2}\right) < h\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$
j) $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) < h\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) < s\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) < f\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
k) $f(\pi) < g(\pi) < h(\pi) < s(\pi)$ **l)** $f(\sqrt{5}) < g(\sqrt{5}) < h(\sqrt{5}) < s(\sqrt{5})$