Roman Brilej

ALFA

Geometrija v ravnini

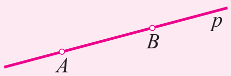
Zbirka nalog za matematiko v
srednjem strokovnem izobraževanju

Ljubljana 2013

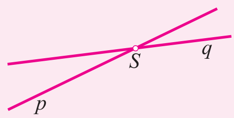
Kazalo

1. Osnovni pojmi

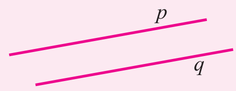
Skozi dve različni točki poteka natanko ena premica. Dve različni premici imata skupno eno samo točko ali pa nobene. Če imata skupno eno samo točko, pravimo, da se **sekata**. Skupno točko imenujemo **presečišče**. Če nimata nobene skupne točke, sta **vzporedni**. Po dogovoru je vsaka premica vzporedna sama sebi.



Točki A in B določata premico p



Premici p in q se sekata v točki S



Premici p in q sta vzporedni ($p||q$)

Za poljubni točki A in B je definirana **razdalja** $d(A,B)$ med točkama A in B, za katero velja:

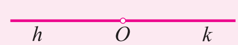
1. $d(A,B) \geq 0$
2. $d(A,B) = 0$ natanko takrat, ko je $A = B$
3. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ za poljubno točko C (trikotniška neenakost)

Če za dve različni točki A, B in točko C velja $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$, potem točka C leži na premici, ki poteka skozi točki A in B, in sicer **med** točkama A in B.

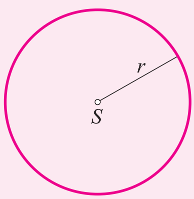
Daljica AB ali **zveznica** točk A in B je množica vseh točk na premici skozi A in B, ki ležijo med točkama A in B, vključno z A in B. Točki A in B imenujemo **krajišči** daljice. Premico, na kateri leži daljica AB, imenujemo **nosilka** daljice AB. **Dolžina** $|AB|$ daljice AB je razdalja med točkama A in B.

Točke so **kolinearne**, če ležijo na isti premici, sicer so **nekolinearne**.

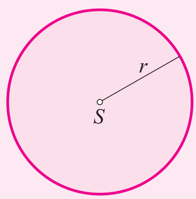
Poljubna točka O na premici le-to razdeli na dva **poltraka** (na sliki h in k), ki imata točko O za **izhodišče**.



Množica vseh točk, ki so od točke S oddaljene za pozitivno število r, je **krožnica** s **središčem** S in **polmerom (radijem)** r. Množica vseh točk, ki so od točke S oddaljene manj ali enako r, je **krog** s središčem S in polmerom r.



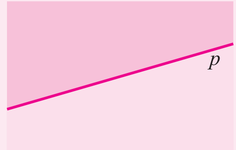
Krožnica s središčem S in polmerom r



Krog s središčem S in polmerom r

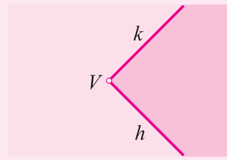
Množica točk je **konveksna**, če hkrati z vsakima svojima točkama vsebuje tudi njuno zveznico.

Poljubna premica p razdeli ravnino na dve **polravnini**, katerih **rob** je premica p.



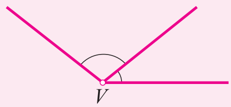
Točki A in B ležita na isti strani (na istem **bregu**) premice p, če obe ležita v isti polravnini.

Dva poltraka s skupnim izhodiščem razdelita ravnino na dva **kota**. Vsak izmed kotov ima dana poltraka za **kraka**, skupno izhodišče pa za **vrh**. V kolikor kota nista enaka, je eden kot **konveksen**, drugi pa **vdrt**.

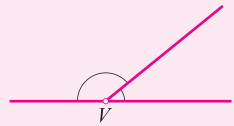


Če kraka kota sestavljata premico, je kot **iztegnjen**. Kota sta **sosedna**, če imata skupen vrh in en krak, drugih skupnih točk pa nimata. **Sokota** sta tista sosedna kota, katerih unija je iztegnjen kot.

Iztegnjeni kot



Sosedna kota

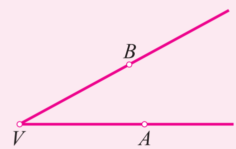


Sokota

Če se poltraka s skupnim izhodiščem prekrivata, določata **polni kot** (vsa ravnina) in **ničelni kot**. Če točki A in B ležita na poltrakih s skupnim izhodiščem V (vsaka točka na enem poltraku), označimo konveksni kot z $\measuredangle AVB$.

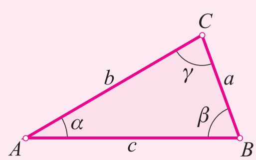
Polni kot

Ničelni kot



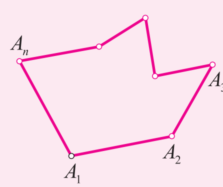
Kot AVB ali $\measuredangle AVB$

Tri nekolinearne točke A, B in C določajo **trikotnik** ABC (z znaki $\triangle ABC$). Točke A, B in C so **oglišča** trikotnika, daljice AB, AC in BC pa njegove **stranice**. Koti $\measuredangle BAC$, $\measuredangle ABC$ in $\measuredangle ACB$ so **notranji koti** trikotnika ABC. Označimo jih zapovrstjo z α, β in γ. Stranico nasproti oglišča A označimo z a, stranico nasproti oglišča B z b in stranico nasproti oglišča C s c.



Točke $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 3$, tvorijo **večkotnik** (n-kotnik) $A_1A_2 \ldots A_n$ z **oglišči** A_1, A_2, $\ldots$, A_n in **stranicami** A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, če velja:

- dve v seznamu nesosedni stranici se ne sekata (z izjemo prve in zadnje)
- dve v seznamu sosedni stranici (prav tako prva in zadnja) se sekata

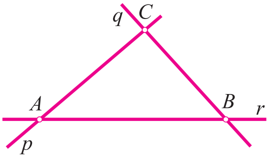


Daljico, ki povezuje dve nesosedni oglišči, imenujemo **diagonala**. Število diagonal n-kotnika je enako $\frac{n(n-3)}{2}$.

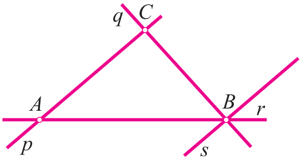
Točke, premice, daljice

Zgledi

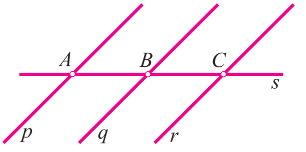
1. Nariši štiri različne premice tako, da bodo imele natanko tri presečišča.
Rešitev: Tri presečišča lahko brez težav dobimo, če narišemo **tri** premice, kot kaže slika.



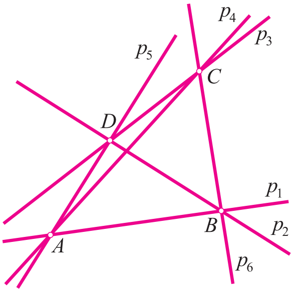
Sedaj moramo narisati še četrto premico, in sicer tako, da ne bomo dobili nobenega novega presečišča. To nam bo uspelo, če skozi eno izmed presečišč, npr. B, narišemo premico, ki je vzporedna s premico, na kateri ležita preostali presečišči. S tem je naloga končana.



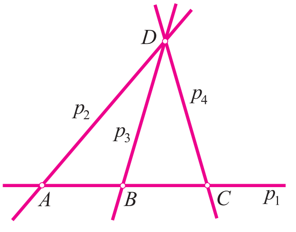
Pripomnimo, da bi lahko štiri premice narisali tudi v drugačnem medsebojnem položaju, pa bi še vedno ustrezale zahtevam naloge. Če narišemo tri vzporedne premice, bodo četrto, ki njim ni vzporedna, sekale v natanko treh točkah.



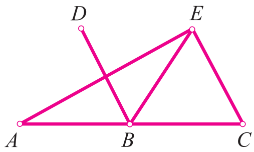
2. Nariši štiri točke tako, da bodo določale natanko štiri premice.
Rešitev: Štiri točke, od katerih nobene tri ne ležijo na isti premici (niso kolinearne), določajo 6 premic, kar je razvidno s slike. Če želimo, da bodo štiri točke določale natanko štiri premice, morajo očitno biti vsaj tri kolinearne, saj s tem zmanjšamo število premic, ki jih določajo.



Na sliki vidimo, da je to tudi rešitev naloge. Tri točke so kolinearne, četrta pa leži izven premice, ki jo določajo preostale tri točke.



3. Koliko daljic s krajišči v označenih točkah je na sliki?



Rešitev: Zapišimo vse daljice, ki imajo krajišče v določeni točki:

A: AB, AC, AE

B: BA, BD, BE, BC

C: CB, CA, CE

D: DB

E: EA, EB, EC

Skupaj imamo zapisanih 14 daljic, a imamo vsako daljico zapisano dvakrat, saj je npr. daljica AB enaka daljici BA. Odgovor na zastavljeno vprašanje dobimo tako, da 14 delimo z 2. Torej je na sliki 7 daljic s krajišči v označenih točkah.

4. Točka A leži med točkama B in C in je od točke B oddaljena $8\,\text{cm}$, od točke C pa $17\,\text{cm}$. Določi $d(B,C)$.

Rešitev: Podatke zapišimo v matematičnem jeziku:

$$d(A,B) = 8\,\text{cm} \qquad d(A,C) = 17\,\text{cm}$$

Ker leži točka A med točkama B in C, velja:

$$\boxed{d(B,C) = d(B,A) + d(A,C)}$$

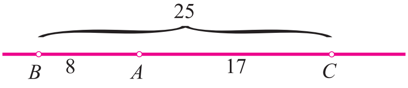
Upoštevajmo še, da je:

$$\boxed{d(B,A) = d(A,B)}$$

Tako imamo:

$$d(B,C) = d(B,A) + d(A,C) = d(A,B) + d(A,C) = 8 + 17 = 25\,\text{cm}$$

Celotno nalogo lahko jasno predstavimo tudi na sliki:



5. Točke A, B in C so kolinearne, za njihove medsebojne oddaljenosti pa velja:

$$d(A,B) = 42\,\text{m} \qquad d(A,C) = 13\,\text{m} \qquad d(B,C) = 29\,\text{m}$$

Katera točka leži med ostalima dvema?

Rešitev: Ker so dane točke kolinearne, ena izmed njih leži med drugima dvema. Katera je to, pa bomo ugotovili s pomočjo trditve, ki smo jo srečali v prejšnji nalogi. Le-ta velja tudi v obratni smeri. Tako leži točka X med točkama Y in Z natanko takrat, ko velja enakost:

$$\boxed{d(Y,Z) = d(Y,X) + d(X,Z)}$$

V našem primeru vidimo, da je:

$$42\,\mathrm{m} = 13\,\mathrm{m} + 29\,\mathrm{m}$$

Torej velja:

$$d(A,B) = d(A,C) + d(B,C)$$

Upoštevajmo še:

$$d(B,C) = d(C,B)$$

Tako lahko zapišemo:

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$$

To pa pomeni, da leži točka C med točkama A in B

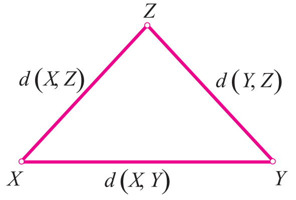
6. Ali za točke A, B in C lahko velja:

$$d(A,B) = 24\,\mathrm{mm} \qquad d(A,C) = 37\,\mathrm{mm} \qquad d(B,C) = 12\,\mathrm{mm}$$

Rešitev: Za poljubne točke X, Y in Z velja **trikotniška neenakost**:

$$\boxed{d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)}$$

Z besedami lahko zgornjo neenakost opišemo tako, da je razdalja med poljubnima točkama kvečjemu enaka vsoti razdalj teh točk do neke tretje točke. Ponazoritev tega dejstva vidimo na sliki.



Poglejmo, ali velja zapisana neenakost v našem primeru. Na levo stran zapišimo največjo razdaljo, torej $d(A,C)$, na desno pa preostali dve:

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

Vstavimo podatke:

$$37 \leq 24 + 12$$

Ker je $24 + 12 = 36$, zgornja neenakost ni izpolnjena. To pomeni, da zapisane razdalje med danimi točkami niso mogoče.

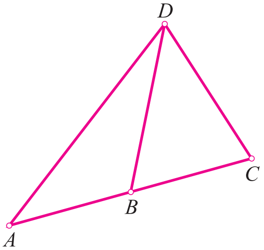
Naloge

1. Koliko presečišč imajo lahko tri različne premice? Nariši ustrezne slike.

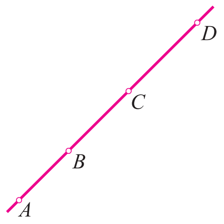
2. Koliko premic določajo tri različne točke? Nariši ustrezne slike.

3. Koliko daljic s krajišči v označenih točkah je na sliki?

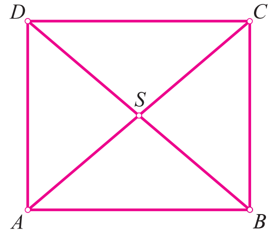
a)



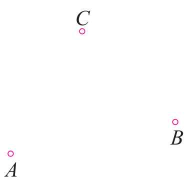
b)



c)



4. Dane so točke A, B in C:



Vsako izmed spodnjih nalog reši na svoji sliki:

a) Nariši premico p skozi točki A in B.

b) Nariši daljico BC.

c) Nariši nosilko q daljice AC.

d) Nariši poltrak k z izhodiščem v točki C, na katerem leži točka A.

e) Nariši poltrak h z izhodiščem v točki B, na katerem leži točka A.

f) Nariši množico točk, ki ležijo hkrati na poltrakih z izhodiščema v točkah C in A, če poteka tisti z izhodiščem v točki C skozi točko A, tisti z izhodiščem v točki A pa skozi točko C.

5. Točka A leži med točkama B in C. Določi razdaljo med točkama B in C, če je:

a) $d(A,B) = 4$ cm, $d(A,C) = 8$ cm

b) $d(A,B) = 3$ m, $d(A,C) = 7$ m

c) $d(A,B) = 15$ dm, $d(A,C) = 21$ dm

d) $d(A,B) = 1{\cdot}5$ mm, $d(A,C) = 0{\cdot}4$ mm

6. Dane so razdalje med kolinearnimi točkami A, B in C. Ena izmed njih leži med ostalima dvema. Katera:

a) $d(A,B) = 5$ cm, $d(A,C) = 2$ cm, $d(B,C) = 3$ cm

b) $d(A,B) = 8$ cm, $d(A,C) = 10$ cm, $d(B,C) = 18$ cm

c) $d(A,B) = 7$ m, $d(A,C) = 15$ m, $d(B,C) = 8$ m

d) $d(A,B) = 4$ mm, $d(A,C) = 3$ mm, $d(B,C) = 7$ mm

***7.** Ali za točke A, B in C lahko velja:

a) $d(A,B) = 4$ m, $d(A,C) = 3$ m, $d(B,C) = 5$ m

b) $d(A,B) = 5$ cm, $d(A,C) = 6$ cm, $d(B,C) = 12$ cm

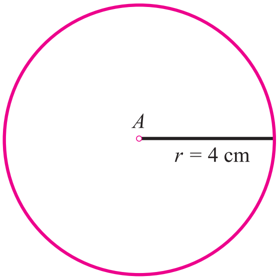
c) $d(A,B) = 23$ km, $d(A,C) = 11$ km, $d(B,C) = 12$ km

d) $d(A,B) = 1{\cdot}6$ dm, $d(A,C) = 2{\cdot}8$ dm, $d(B,C) = 4{\cdot}4$ dm

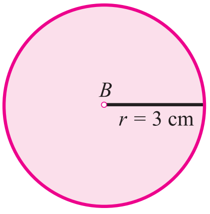
Krog in krožnica

Zgledi

1. Nariši točko A in množico vseh točk, ki so od točke A oddaljene 4 cm.
Rešitev: Množica točk, ki so od točke A oddaljene 4 cm, tvorijo **krožnico** s središčem A in polmerom $r = 4$ cm.

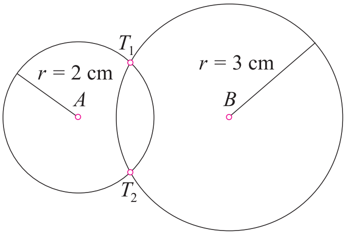


2. Nariši točko B in množico točk, ki so od točke B oddaljene največ 3 cm.
Rešitev: Množica točk, ki so od točke B oddaljene največ 3 cm, je **krog** s središčem B in polmerom $r = 3$ cm.



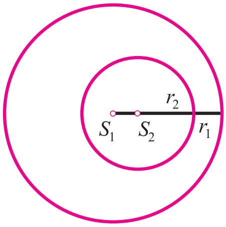
3. Dani sta točki A in B v medsebojni oddaljenosti 4 cm. Nariši vse točke, ki so od točke A oddaljene 2 cm, od točke B pa 3 cm.

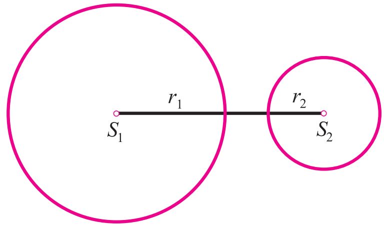
Rešitev: Točke, ki so od točke A oddaljene 2 cm, ležijo na krožnici s središčem A in polmerom $r = 2$ cm, tiste, ki so od točke B oddaljene 3 cm, pa na krožnici s središčem B in polmerom $r = 3$ cm. Točki, ki zadoščata obema pogojema, sta ravno presečišči T_1 in T_2 obeh krožnic.



4. Kolikšna mora biti razdalja med središčema krožnic s polmeroma 8 cm in 12 cm, da ne bosta imeli nobene skupne točke?
Rešitev: Krožnici se ne bosta dotikali, če bosta središči dovolj blizu in bo tako ena ležala znotraj kroga, ki ga omejuje druga, ali pa bosta središči dovolj narazen.

Oboje je prikazano na spodnjih slikah, kjer smo z r_1 označili polmer večje krožnice in z r_2 polmer manjše.





V prvem primeru velja:

$$d(S_1, S_2) + r_2 < r_1$$

Torej:

$$d(S_1, S_2) < r_1 - r_2$$

V drugem primeru pa mora biti:

$$d(S_1, S_2) > r_1 + r_2$$

Z našimi podatki pomeni v prvem primeru:

$$d(S_1, S_2) < r_1 - r_2 = 12 - 8 = 4$$

V drugem primeru imamo:

$$d(S_1, S_2) > r_1 + r_2 = 12 + 8 = 20$$

Tako lahko sklepamo, da dani krožnici ne bosta imeli skupne točke, če bosta njuni središči oddaljeni manj kot 4 cm ali pa več kot 20 cm.

Naloge

8. Nariši točko A in množico vseh točk, ki so od točke A oddaljene:

a) 3 cm **b)** 2 cm **c)** 2·5 cm

9. Nariši točko T in množico vseh točk, ki so od točke T oddaljene za največ:

a) 2 cm **b)** 2·7 cm **c)** 3·2 cm

10. Točki A in B sta med seboj oddaljeni 5 cm. Nariši vse tiste točke, ki so od točke A oddaljene 3 cm, od točke B pa:

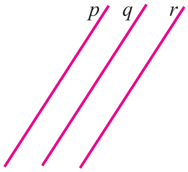
a) 4 cm **b)** 3 cm **c)** 1 cm **d)** 2 cm

e) 8 cm **f)** 9 cm

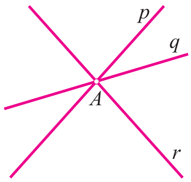
11. Dani sta krožnici s središčem S_1 in polmerom $r_1 = 7$ cm ter središčem S_2 in polmerom $r_2 = 12$ cm. Kolikšna sme biti razdalja med središčema S_1 in S_2, da krožnici ne bosta imeli nobene skupne točke?

Rešitve

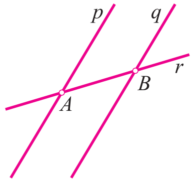
1. 0 presečišč



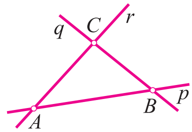
1 presečišče



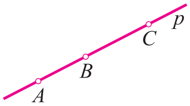
2 presečišči



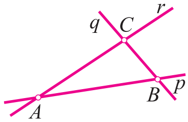
3 presečišča



2. Eno premico.

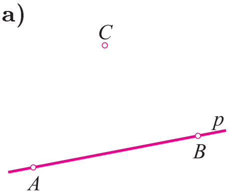


Tri premice.

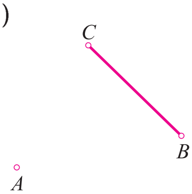


3. **a)** 6 (AB, AC, BC, AD, BD, CD) **b)** 6 (AB, AC, AD, BC, BD, CD)
c) 10 (AB, AC, AD, AS, BC, BD, BS, CD, CS, DS)

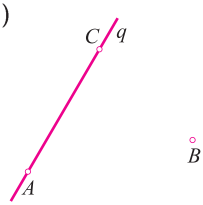
4. **a)**



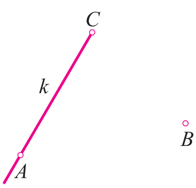
b)



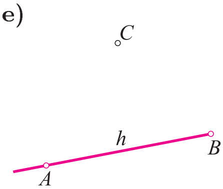
c)



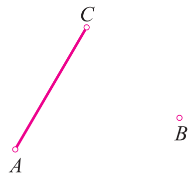
d)



e)



f)

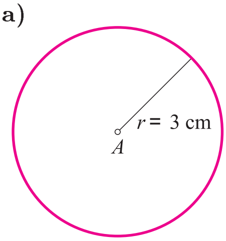


5. **a)** 12 cm **b)** 10 m **c)** 36 dm **d)** 1·9 mm

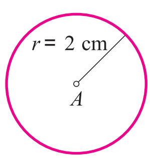
6. **a)** C **b)** A **c)** B **d)** A

7. **a)** Da. **b)** Ne. **c)** Da. **d)** Da.

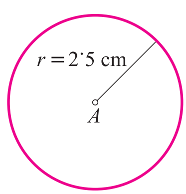
8. **a)**



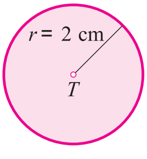
b)



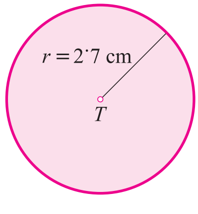
c)



9. **a)**



b)



c)